

LAURENT SCHWARTZ

**Un lemme sur la dérivation des fonctions  
vectorielles d'une variable réelle**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 2 (1950), p. 17-18.

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1950\\_\\_2\\_\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__17_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**UN LEMME**  
**SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS VECTORIELLES**  
**D'UNE VARIABLE RÉELLE**

par **Laurent SCHWARTZ** (Nancy).

---

Soit  $E$  un espace vectoriel, muni de deux topologies distinctes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_1$  plus fine que  $\mathcal{C}_2$ . Soit d'autre part  $t \rightarrow f(t)$  une application de la droite réelle dans  $E$ , supposée continuellement différentiable pour la topologie la moins fine  $\mathcal{C}_2$ , mais telle que sa dérivée  $f'(t)$  soit continue pour la topologie la plus fine  $\mathcal{C}_1$ . Nous allons supposer que les topologies  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  vérifient la propriété suivante : (P) *Quel que soit le  $\mathcal{C}_1$ -voisinage de  $0, V_1$ , de  $E$ , il existe un  $\mathcal{C}_1$ -voisinage  $W_1$ , tel que l'enveloppe convexe  $\mathcal{C}_2$ -fermée de tout  $\mathcal{C}_1$ -compact  $C_1$  de  $W_1$  soit dans  $V_1$ .*

Alors la dérivée  $f'(t)$  est aussi la dérivée de  $f(t)$  pour la topologie la plus fine  $\mathcal{C}_1$ .

En effet, en vertu de la  $\mathcal{C}_1$ -continuité de  $f'(t)$ , quel que soit  $V_1$ , il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  entraîne

$$[f'(t) - f'(t_0)] \in W_1.$$

Mais alors on peut écrire

$$[f(t) - f(t_0)] / (t - t_0) = (t - t_0)^{-1} \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau,$$

l'intégrale étant valable pour la topologie  $\mathcal{C}_2$ .

Quand  $\tau$  parcourt l'intervalle  $(t_0, t)$ ,  $f'(\tau)$  décrit un  $\mathcal{C}_1$ -compact  $C_1 \subset f'(t_0) + W_1$ , et l'intégrale du second membre reste dans l'enveloppe convexe  $\mathcal{C}_2$ -fermée de ce compact, donc dans  $f'(t_0) + V_1$  en vertu de la propriété (P). Cela prouve bien que  $f'(t)$  est la dérivée pour la topologie  $\mathcal{C}_1$  la plus fine.

Voici deux cas importants pour lesquels la propriété (P) est vérifiée :

1°  $\mathcal{C}_1$  possède un système fondamental de voisinages de 0 convexes qui sont  $\mathcal{C}_2$ -fermés. Alors on peut prendre  $W_1 = V_1$ . En particulier  $\mathcal{C}_2$  pourra être la topologie faible associée à  $\mathcal{C}_1$ .

2° Dans  $\mathcal{C}_1$ , l'enveloppe convexe fermée de tout compact  $C_1$  est faiblement compacte. Elle est alors aussi  $\mathcal{C}_2$ -faiblement compacte, donc  $\mathcal{C}_2$ -fermée, et on peut encore prendre  $W_1 = V_1$ . En particulier (P) sera toujours vérifiée si E est  $\mathcal{C}_1$ -complet.

(Parvenu aux Annales en février 1951.)

---