
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Trigonométrie rectiligne. Note sur la recherche du point dont la somme des distances aux trois sommets d'un triangle est la moindre possible

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 299-303.

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__299_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Note sur la recherche du point dont la somme des distances aux trois sommets d'un triangle est la moindre possible ;

Par M. GERGONNE.



A la page 136, du V.^{me} volume de la *Correspondance* de M. QUETELET, M. Noël, principal de l'Athénée de Luxembourg, a proposé le problème suivant :

« La demeure d'un propriétaire , celle de son fermier et ses granges, ont leurs portes aux sommets d'un triangle dont les côtés » valent respectivement 210, 200 et 290 mètres. Le propriétaire » veut joindre ces trois portes par trois chemins qui, pour les » construire, coûteront 0 f. 50 c. par mètre carré ; la largeur de » ces chemins devant être de 2 mètres. Il demande en quel point » il faut établir le concours des trois chemins pour que le prix » total de leur construction soit le moindre possible, et quel sera » ce moindre prix ? »

En lisant cet énoncé, je m'étais figuré que M. Noël n'avait eu d'autre but que rendre un peu plus piquant le problème suivant : *Quel est le point de l'intérieur d'un triangle dont la somme des distances à ses trois sommets est la moindre possible ?* Et, à la pag. 151 du présent volume, je témoignais ma surprise de ce qu'un tel problème, dont la solution m'était déjà connue, lorsque je n'étais encore qu'écolier, passât aujourd'hui pour nouveau aux yeux des estimables collaborateurs de la *Correspondance*.

Par une lettre en date du 11 janvier dernier, M. Noël m'apprend que j'étais dans l'erreur ; qu'en proposant ce problème il savait très-bien que le point demandé doit être tellement situé que les droites qui le joignent aux trois sommets du triangle forment autour de lui des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit, ayant conséquemment leurs sinus égaux à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et leurs cosinus égaux à $-\frac{1}{2}$; mais que son intention avait été de provoquer la recherche d'une formule qui donnât l'expression de la somme des trois distances en fonction des données du problème, comme on serait en effet obligé de le faire pour un devis qu'on aurait à dresser.

Envisagé sous ce point de vue, le problème paraît en effet être nouveau ; et voici, ce nous semble, la manière la plus analytique de le résoudre.

Soient A, B, C les trois sommets du triangle donné et O le point cherché; posons .

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z;$$

en vertu des formules fondamentales de la trigonométrie rectiligne, on aura

$$\left. \begin{array}{l} \text{Triangle BOC,} \quad y^2 + yz + z^2 = a^2, \\ \text{Triangle COA,} \quad z^2 + zx + x^2 = b^2, \\ \text{Triangle AOB,} \quad x^2 + xy + y^2 = c^2. \end{array} \right\} (1)$$

Ces équations pourraient suffire, à la rigueur, pour résoudre le problème; en éliminant entre elles deux des inconnues, on obtiendrait pour la troisième une équation du quatrième degré, se résolvant à la manière de celles du second; mais cette équation serait excessivement compliquée. Nous éluderons cette difficulté en recourant à une équation auxiliaire.

Les droites OA, OB, OC partagent le triangle ABC en trois autres, dont la somme des aires est égale à la sienne; or, ces aires sont

$$\text{pour BOC,} \quad \frac{yz\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{pour COA,} \quad \frac{zx\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{pour AOB,} \quad \frac{xy\sqrt{3}}{4};$$

de sorte qu'en désignant par T l'aire du triangle ABC, on a

PROBLÈME

$$T = \frac{(yz + zx + xy)\sqrt{3}}{4} ;$$

d'où

$$3(yz + zx + xy) = 4T\sqrt{3} ; \quad (2)$$

ajoutant cette équation à la somme des équations (1), il viendra

$$2(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4T\sqrt{3} ;$$

d'où

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4T\sqrt{3}}{2}} ; \quad (3)$$

comme l'a trouvé M. Heichen (*Correspondance*, tom. V, pag. 238).

Mais on peut désirer d'obtenir, en particulier, chacune des trois longueurs inconnues x , y , z ; et c'est là une chose très-facile. On tire, en effet, des équations (1) et (2)

$$3(b^2 + c^2 - a^2) + 4T\sqrt{3} = 6x(x + y + z) ;$$

donc, en vertu de la formule (3)

$$x = \frac{3(b^2 + c^2 - a^2) + 4T\sqrt{3}}{3\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) + 8T\sqrt{3}}} ;$$

on aura de même

$$y = \frac{3(c^2 + a^2 - b^2) + 4T\sqrt{3}}{3\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) + 8T\sqrt{3}}} ,$$

$$z = \frac{3(a^2 + b^2 - c^2) + 4T\sqrt{3}}{3\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) + 8T\sqrt{3}}} ,$$

(4)

Soient prolongées les droites AO, BO, CO, jusqu'à la rencontre des côtés BC, CA, AB en A', B', C'. La droite OA' divisant en deux parties égales l'angle BOC, on aura

$$\frac{OB+OC}{BC} = \frac{OB}{A'B} = \frac{OC}{A'C} ;$$

d'où

$$A'B = \frac{OB \cdot BC}{OB+OC} = \frac{ay}{y+z}, \quad A'C = \frac{OC \cdot BC}{OB+OC} = \frac{az}{y+z} ;$$

or, on a

$$\frac{y}{y+z} = \frac{3(c^2+a^2-b^2)+4T\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})}, \quad \frac{z}{y+z} = \frac{3(a^2+b^2-c^2)+4T\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})} ;$$

donc

$$A'B = \frac{3a(c^2+a^2-b^2)+4aT\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})}, \quad A'C = \frac{3a(a^2+b^2-c^2)+4aT\sqrt{3}}{2(3a^2+4T\sqrt{3})} ;$$

on trouvera de même

$$B'C = \frac{3b(a^2+b^2-c^2)+4bT\sqrt{3}}{2(3b^2+4T\sqrt{3})}, \quad B'A = \frac{3b(b^2+c^2-a^2)+4bT\sqrt{3}}{2(3b^2+4T\sqrt{3})},$$

$$C'A = \frac{3c(b^2+c^2-a^2)+4cT\sqrt{3}}{2(3c^2+4T\sqrt{3})}, \quad C'B = \frac{3c(c^2+a^2-b^2)+4cT\sqrt{3}}{2(3c^2+4T\sqrt{3})} .$$

Une fois les trois points A' , B' , C' déterminés, rien ne sera plus aisé que de déterminer le point O .

On pourrait tenter de résoudre, d'une manière analogue, les deux problèmes de trigonométrie sphérique proposés à la pag. 152 du présent volume; mais il est présumable que les calculs en seraient excessivement compliqués. En admettant les mêmes notations que ci-dessus, les trois équations à résoudre, pour le premier, seraient

$$2\cos y \cos z - \sin y \sin z = 2\cos a ,$$

$$2\cos z \cos x - \sin z \sin x = 2\cos b ,$$

$$2\cos x \cos y - \sin x \sin y = 2\cos c .$$