

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. NEWENGLOWSKI

Note sur la transformation des courbes par rayons vecteurs réciproques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 2 (1873), p. 133-136.

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__133_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

SUR

LA TRANSFORMATION DES COURBES

PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES,

PAR M. NEWENGLOWSKI,

PROFESSEUR A MONT-DE-MARSAN.

On peut définir la transformation des courbes par rayons vecteurs réciproques, en disant qu'en deux points correspondants M, M' (*fig. 1*) les tangentes $MT, M'T$ font avec le rayon vecteur OMM' des angles $TMM', TM'M$ égaux. Cela posé, considérons une courbe tracée sur une surface

Fig. 1.

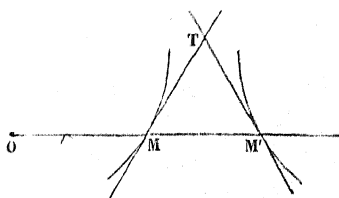
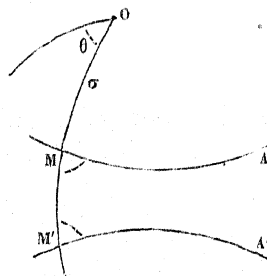


Fig. 2.



quelconque (*fig. 2*). On peut prendre pour coordonnées d'un point quelconque M de cette courbe la longueur σ de la ligne géodésique menée à ce point par un point fixe O pris sur la surface, et l'angle θ de ce *rayon vecteur géodésique* avec une ligne géodésique fixe. Sur chaque rayon OM , prenons un point M' tel que $OM' = \sigma'$, et cherchons s'il peut exister entre σ et σ' une relation

$$f(\sigma, \sigma') = 0$$

indépendante de l'angle θ , et telle que la courbe A'M' soit *inverse* de la courbe AM, c'est-à-dire qu'aux points correspondants les angles AMM', A'M'M soient égaux.

Pour cela, désignons par s la longueur d'un arc compté sur la courbe AM à partir d'une origine quelconque; on a, comme on sait,

$$ds^2 = d\sigma^2 + \lambda^2 d\theta^2,$$

λ étant, en général, fonction de σ et de θ .

Si i désigne l'angle de la courbe AM avec le rayon vecteur géodésique, on a

$$\cos i = \frac{1}{\lambda} \frac{d\sigma}{d\theta}.$$

Désignons par les mêmes lettres, mais accentuées, les éléments correspondants de la courbe A'M'; on aura

$$\cos i' = \frac{1}{\lambda'} \frac{d\sigma'}{d\theta},$$

et les deux courbes seront inverses si

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{1}{\lambda'} \frac{d\sigma'}{d\theta} = 0$$

ou

$$(1) \quad \frac{d\sigma}{\lambda} + \frac{d\sigma'}{\lambda'} = 0.$$

Cette relation doit être indépendante de θ . Donc il faut que λ et λ' soient fonctions de σ et σ' seuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda = \varphi(\sigma), \quad \lambda' = \varphi'(\sigma').$$

Alors l'expression générale de l'élément de courbe tracée sur la surface sera donnée par l'équation

$$ds^2 = d\sigma^2 + [\varphi(\sigma)]^2 d\theta^2.$$

Ce qui montre que la surface donnée *doit être de révolution autour d'un axe mené par le point O*, pour que la transformation demandée soit possible.

Si l'on désigne par α l'angle du méridien mené par M avec le méridien

fixe contenant la ligne géodésique fixe prise *comme axe polaire*, on aura

$$\theta = b \alpha,$$

b étant une constante, et l'on pourra écrire

$$ds^2 = d\sigma^2 + [b\varphi(\sigma)]^2 d\alpha^2;$$

et l'on voit sous cette forme que $b\varphi(\sigma)$ est la distance d'un point de la surface à l'axe de révolution.

Ce qui précède est vrai, en général; mais si la surface donnée est un cône quelconque ayant son sommet en O, les lignes géodésiques σ seront des lignes droites, et l'on aura

$$ds^2 = d\sigma^2 + \sigma^2 d\theta^2,$$

$d\theta$ étant l'angle de deux génératrices infiniment voisines, et l'équation (1) prendra la forme

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{d\sigma'}{\sigma'} = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma\sigma' = m,$$

ce qui est la relation bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Reprenons l'équation (1), dans laquelle nous supposons

$$\lambda = b\varphi(\sigma), \quad \lambda' = b\varphi'(\sigma');$$

nous pourrons l'écrire

$$\frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)} + \frac{d\sigma'}{\varphi'(\sigma')} = 0,$$

et, par suite, nous pourrons énoncer ce théorème :

Étant donnée une surface de révolution autour d'un axe qui la rencontre en O (fig. 3), deux courbes tracées sur cette surface seront inverses par rapport au point O, si les arcs de méridiens comptés à partir de O jusqu'aux points correspondants M, M' satisfont à l'équation

$$(2) \quad \int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)} + \int \frac{d\sigma'}{\varphi'(\sigma')} = m,$$

dans laquelle m est une constante, et $\varphi(\sigma)$ est proportionnelle à la distance MP du point M à l'axe.

Exemples. — 1° Sur une sphère, on a

$$\varphi(\sigma) = \sin \sigma;$$

l'équation (2) devient

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \sigma \times \operatorname{tang} \frac{1}{2} \sigma' = m \quad (1).$$

Fig. 3.

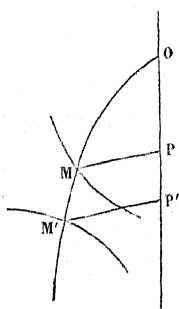
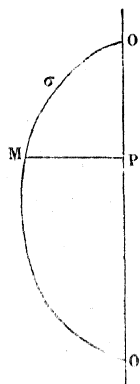


Fig. 4.



2° Considérons la surface de révolution engendrée sur une cycloïde tournant autour de la ligne OO' (*fig. 4*), qui joint deux points de rebroussement consécutifs.

On a ici

$$MP = \frac{\sigma(8a - \sigma)}{8a},$$

a désignant le rayon de cercle générateur. L'équation (2) peut s'écrire

$$\int \frac{8a d\sigma}{\sigma(8a - \sigma)} + \int \frac{8a d\sigma'}{\sigma'(8a - \sigma')} = m \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma \sigma'}{(8a - \sigma)(8a - \sigma')} = m;$$

mais si $OM = \sigma$, $O'M = 8a - \sigma$, désignant donc $8a - \sigma$ et $8a - \sigma'$ par σ_1 et σ'_1 , on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\sigma \sigma'}{\sigma_1 \sigma'_1} = m.$$

Donc, sur la surface considérée, deux courbes inverses par rapport au point O , le sont aussi par rapport au point O' .

(1) Voir *Étude sur la sphère* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1870).