PHILLIPS

Note sur un problème de cinématique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 353-356.
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__353_0>

NOTE

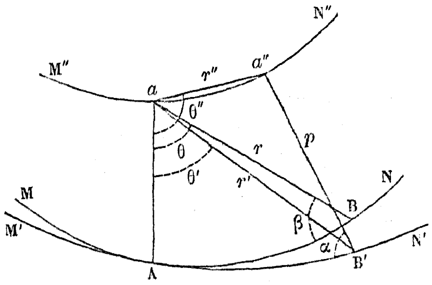
SUR UN

PROBLÈME DE CINÉMATIQUE,

PAR M. PHILLIPS,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

On sait que M. Airy a fait voir que la méthode des enveloppes et celle des roulettes, pour déterminer deux profils conjugués d'un engrenage plan, reviennent au fond l'une à l'autre, et c'est ce qu'il a fait en démontrant que, étant données deux courbes planes quelconques M'N' et M''N'', on peut toujours trouver une autre courbe MN qui soit telle que,



MN roulant sur M'N', un point a relié invariablement à MN décrive la courbe M''N''. La seule condition nécessaire est que les normales, menées par les différents points de M'N' à M''N'', rencontrent cette dernière courbe. Il a donné, en même temps, le moyen de déterminer cette courbe MN.

Cette question suggère le problème suivant, qui fait l'objet de cette Note : Étant données deux courbes quelconques MN et M''N'', trouver une courbe M′N′ qui soit telle que, MN roulant sur M′N′, un point a relié invariablement à MN décrive la courbe M″N″.

La droite aA, qui joint a au point de contact actuel A des deux courbes MN et M′N′, est normale en a à la courbe M″N″. Prenons a pour pôle et aA pour axe polaire.

Soient B, dont les coordonnées polaires sont r et θ, un point quelconque de MN et B′, dont les coordonnées polaires sont r' et θ', le point de M′N′ avec lequel le point B doit plus tard coïncider. Soit B′a'' la normale à M″N″, menée du point B′. Soient r'' et θ'' les coordonnées polaires de a''. Désignons enfin : par p la longueur de la normale B′a''; par α l'angle sous lequel cette normale rencontre la courbe M′N′ en B′ et par β l'angle sous lequel le rayon vecteur aB rencontre la courbe MN en B. Quand le contact des deux courbes MN et M′N′ a lieu en B′, le rayon vecteur aB coïncide exactement avec la normale B′a'', et l'on a

$$r=p \quad \text{et} \quad \beta=\alpha.$$

La courbe MN étant donnée, on a

$$\operatorname{tang}\beta=f(r),$$

$f(r)$ étant une fonction connue de r; par suite on a

$$\operatorname{tang}\alpha=f(p). \tag{1}$$

Soient t' l'angle formé par le rayon vecteur aB′ avec la tangente à M′N′ en B′ et t'' l'angle formé par le rayon vecteur aa'' avec la tangente à M″N″ en a''.

Le triangle aa''B′ donne

$$p=\sqrt{r'^2+r''^2-2r'r''\cos(\theta''-\theta')}. \tag{2}$$

Dans le même triangle, l'angle aa''B′ $= 90^\circ + t''$; d'où

$$p : r' :: \sin(\theta''-\theta') : \cos t''.$$

On déduit de là, en ayant égard à l'équation (2),

$$\frac{r'^2\sin^2(\theta''-\theta')}{\cos^2 t''}=r'^2+r''^2-2r'r''\cos(\theta''-\theta'), \tag{3}$$

équation qui revient à

$$\text{(I)} \qquad r'^2 \sin^2(\theta'' - \theta')\left(1 + \frac{r''^2\, d\theta''^2}{dr''^2}\right) = r'^2 + r''^2 - 2\, r' r'' \cos(\theta'' - \theta').$$

D'un autre côté, on a

$$\alpha = t' + a\mathrm{B}'a'',$$

ou, en mettant pour $a\mathrm{B}'a''$ sa valeur donnée par le triangle $a\mathrm{B}'a''$,

$$\alpha = t' + 180^\circ - (90^\circ + t'') - (\theta'' - \theta'),$$

ou enfin

$$(4) \qquad \alpha = 90^\circ - (t'' - t') - (\theta'' - \theta').$$

On tire de là, en développant,

$$\tan\alpha = \frac{1 + \tan t'' \tan t' - (\tan t'' - \tan t')\tan(\theta'' - \theta')}{\tan t'' - \tan t' + (1 + \tan t'' \tan t')\tan(\theta'' - \theta')},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad \tan\alpha = \frac{1 + \dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} - \left(\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''} - \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\tan(\theta'' - \theta')}{\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''} - \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} + \left(1 + \dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\tan(\theta'' - \theta')}.$$

Substituons maintenant, dans l'équation (1), à $\tan\alpha$ sa valeur (5) et à p sa valeur (2); nous aurons

$$\text{(II)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1 + \dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} - \left(\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''} - \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\tan(\theta'' - \theta')}{\dfrac{r''\,d\theta''}{dr''} - \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'} + \left(1 + \dfrac{r''\,d\theta''}{dr''}\dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}\right)\tan(\theta'' - \theta')} \\ &\quad = f\left[\sqrt{r'^2 + r''^2 - 2\, r' r'' \cos(\theta'' - \theta')}\right]. \end{aligned}\right.$$

Soit enfin

$$\text{(III)} \qquad r'' = \mathrm{F}(\theta'')$$

l'équation de la courbe donnée M″N″.

En éliminant r'' et θ'' entre les trois équations (I), (II) et (III), on aura l'équation différentielle de la courbe cherchée M′N′.

Supposons que la courbe M″N″ soit une droite. Alors on a

$$\theta'' = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r'' \, d\theta''}{dr''} = 0.$$

L'équation (I) donne

$$\sqrt{r'^2 + r''^2 - 2\,r' r'' \cos(\theta'' - \theta')} = r' \cos\theta',$$

et l'équation (II) devient

$$\frac{\operatorname{tang}\theta' + \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}}{1 - \operatorname{tang}\theta' \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}} = f(r'\cos\theta'), \tag{6}$$

qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée M′N′.

Supposons que, en même temps, la courbe donnée MN soit une spirale logarithmique dont le pôle soit en a. Alors l'angle β est constant et l'équation (6) devient

$$\frac{\operatorname{tang}\theta' + \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}}{1 - \operatorname{tang}\theta' \dfrac{r'\,d\theta'}{dr'}} = \operatorname{tang}\beta.$$

Soit γ' l'angle formé par la tangente en B′ à M′N′ avec la droite Aa. On voit que le premier membre de l'équation ci-dessus revient à tang γ', d'où résulte

$$\gamma' = \beta,$$

ce qui montre que, dans ce cas, la courbe M′N′ est une droite qui coupe Aa suivant l'angle β.

Si la courbe MN, au lieu d'être une spirale logarithmique était une circonférence de cercle ayant son centre en a, on trouverait de même, pour la courbe M′N′, une droite perpendiculaire à aA, résultat évident *a priori*.