CH MÉRAY

Sur l'existence effective des deux périodes des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 177-180.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__177_0>

SUR L'EXISTENCE EFFECTIVE

DES

DEUX PÉRIODES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

La méthode la plus naturelle à suivre pour exposer la théorie des fonctions elliptiques me paraît être celle que MM. Briot et Bouquet ont employée dans la première édition de leur grand Traité. Elle consiste à tirer de l'équation différentielle qui définit la fonction λ les propriétés fondamentales de cette fonction, et notamment sa double périodicité. Mais, pour la réalité de cette dernière propriété et des conséquences très importantes qui s'en déduisent, il faut absolument que le rapport des deux périodes ne soit pas réel, ou bien, ce qui revient au même, que le déterminant de leurs éléments (parties réelles et coefficients de i) ne soit pas nul. Personne, à ma connaissance, n'a encore publié une démonstration de ce point essentiel; c'est une véritable lacune, à présent surtout, que les éléments de cette théorie figurent dans le programme de la Licence. Mais voici un moyen très simple de la combler (¹).

En supposant g non nul et aussi, pour fixer les idées, qu'aucune des quatre constantes inégales a, b, c, d ne se réduit à zéro, je poserai

$$\Delta u = \sqrt{g(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

(¹) Quelquefois on procède synthétiquement en prenant pour point de départ tel ou tel développement des fonctions θ, et en prouvant *a posteriori* que la fonction λ ainsi définie satisfait à l'équation différentielle des fonctions elliptiques. Mais la difficulté est seulement déplacée; car il reste alors à démontrer que l'on peut disposer des périodes, de manière à faire acquérir aux coefficients de l'équation différentielle des valeurs particulières choisies arbitrairement, ce qui est très indirect et paraît peu susceptible d'une démonstration simple.

et je considérerai la fonction $u = \Lambda(x)$ définie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \Delta u$$

complétée, pour $x = 0$, par les conditions initiales $u = 0$ et $\Delta u =$ une valeur choisie arbitrairement parmi les deux déterminations du radical $\sqrt{gabcd}$. Cette fonction jouit des propriétés fondamentales suivantes, dont je reproduis seulement les énoncés :

1° Dans une portion limitée quelconque du plan servant à la représentation graphique de x, $\Lambda(x)$ ne devient infinie que pour un nombre limité de valeurs particulières de cette variable; elle y est *quasi olotrope* (*méromorphe*, en parlant comme MM. Briot et Bouquet).

2° En appelant X, A, B, C, D les valeurs de l'intégrale $\int \frac{du}{\Delta u}$ prise d'abord sur un chemin de longueur limitée (oU) tracé arbitrairement de o à U, valeur particulière quelconque de u, puis de o à o sur quatre boucles enveloppant chacune une seule fois les points a, b, c, d respectivement et formant par leur ensemble un contour fermé pouvant être déformé insensiblement jusqu'à une circonférence renfermant a, b, c, d, sans franchir aucun de ces quatre points, puis posant

$$A - B = \Omega, \quad A - C = \Pi,$$

les valeurs de l'intégrale définie $\int_0^U \frac{du}{\Delta u}$, prise sur tous les chemins imaginables, sont renfermées dans les deux formules

$$X + m\Omega + n\Pi, \quad A - X + m\Omega + n\Pi,$$

où m, n sont des entiers indéterminés positifs, nuls ou négatifs.

Réciproquement, on peut tracer de o à U quelque chemin faisant acquérir à l'intégrale considérée une valeur quelconque choisie parmi celles que donnent ces formules, quand les entiers m, n reçoivent successivement toutes les combinaisons de valeurs possibles.

3° On peut assigner une limite supérieure au module de la valeur que prend l'intégrale $\int_0 \frac{du}{\Delta u}$ sur tous les chemins imaginables (finis ou infinis), dont les spires, enveloppant tels ou tels des quatre points a, b, c, d, sont en nombre limité.

Cela posé, en appelant Ω', Ω'' les éléments de Ω et Π', Π'' ceux de Π, nous avons à prouver que l'on ne peut avoir

$$\begin{vmatrix} \Omega' & \Omega'' \\ \Pi' & \Pi'' \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

A cet effet, soit ξ une valeur particulière de x ne rendant pas $\Lambda(x)$ infinie, et faisons mouvoir x de o à ξ sur un chemin ne contenant aucun infini de cette fonction, ce qui est évidemment possible (1°). Le point $u = \Lambda(x)$ décrira une certaine ligne limitée (ov), commençant à $0 = \Lambda(0)$ et finissant à $v = \Lambda(\xi)$. Inversement l'intégrale $\int \frac{du}{\Delta u}$ prise sur (ov) est égale à ξ.

En appelant ξ_0 la valeur de la même intégrale prise sur un chemin $(\mathrm{o}v)_0$, tracé arbitrairement de o à v, sous la seule condition qu'il forme autour de a, b, c, d des spires en nombre limité, on pourra (2°) trouver pour les entiers m, n certaines valeurs donnant

$$m\Omega + n\Pi = \text{soit } \xi - \xi_0, \quad \text{soit } \xi - (\mathrm{A} - \xi_0).$$

La quantité ξ étant arbitraire en module et en direction, sauf la légère restriction de n'être pas un infini de $\Lambda(x)$, et la quantité ξ_0 conservant, quelle que soit v, un module inférieur à une limite que l'on peut assigner (3°), il est évident que, dans chacune des quantités $\xi - \xi_0$, $\xi - (\mathrm{A} - \xi_0)$, le rapport des éléments peut, lui ou son inverse à volonté, être rendu numériquement supérieur à une quantité positive donnée quelconque. Donc, en vertu de l'égalité précédente, la même chose doit pouvoir être réalisée pour les rapports équivalents

$$\frac{m\Omega' + n\Pi'}{m\Omega'' + n\Pi''}, \quad \frac{m\Omega'' + n\Pi''}{m\Omega' + n\Pi'}.$$

Maintenant, il est évident qu'on ne peut avoir ni

$$\Omega' = \Omega'' = \Pi' = \Pi'' = 0;$$

car Ω et Π seraient nuls, et l'on aurait toujours $\xi = \xi_0$ ou $= \mathrm{A} - \xi_0$, ce que rend impossible l'indétermination absolue du module de ξ combinée avec la limitation de ceux de ξ_0, $A - \xi_0$; ni Π', Π'', non tous deux $= 0$ avec $\Omega' = k\Pi'$, $\Omega'' = k\Pi''$; car, en supposant, pour fixer les idées, Π'' non $= 0$, le premier des rapports ci-dessus se réduirait, quels que fussent m, n, à la constante $\frac{\Pi'}{\Pi''}$ et, par suite, ne pourrait lui être rendu numériquement supérieur; ni Ω', Ω'', non tous deux $= 0$ avec

$$\Pi' = k\Omega', \quad \Pi'' = k\Omega'',$$

cela pour une raison analogue.

L'égalité (1) ne peut donc avoir lieu, puisqu'elle entraînerait forcément l'une des trois conséquences dont l'impossibilité vient d'être constatée.