N. SONIN

Sur les termes complémentaires da le formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 257-262.
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__257_0>

SUR LES TERMES COMPLÉMENTAIRES

DE LA

FORMULE SOMMATOIRE D'EULER

ET DE

CELLE DE STIRLING,

PAR M. N. SONIN.

Dans la formule d'Euler ($b = a + mh$),

$$h\sum_{k=0}^{m-1} f(a+kh) = \int_a^b f(u)\,du - \tfrac{1}{2}h\,[f(b)-f(a)] + \frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)] - \dots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{2n-3}\,h^{2n-2}}{(2n-2)!}[f^{2n-3}(b) - f^{2n-3}(a)] + R_n,$$

le reste R_n peut être représenté par l'intégrale

$$R_n = -\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^{\frac{1}{2}} S_{2n}(t)\,\varphi_{2n}(t)\,dt,$$

où l'on a admis

$$S_{2n}(t) = \sum_{k=0}^{m-1}[f^{2n}(a+kh+ht) + f^{2n}(a+kh+h-ht)],$$

et $\varphi_{2n}(t)$ désigne le polynôme de Bernoulli qui conserve le signe de $(-1)^n$ et *croît* numériquement en même temps que t croît de 0 jusqu'à $\frac{1}{2}$.

Supposons que $S_{2n}(t)$ conserve le signe $\alpha = \pm$ et *décroisse* numériquement lorsque t croît de o à $\frac{1}{2}$. Dans l'expression

$$-\alpha(-1)^n R_n = \frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^{\frac{1}{2}} \alpha S_{2n}(t).(-1)^n \varphi_{2n}(t)\,dt,$$

nous aurons sous l'intégrale le produit d'une fonction *positive décroissante* $\alpha S_{2n}(t)$ par la fonction *positive croissante* $(-1)^n \varphi_{2n}(t)$; par conséquent, l'intégrale dont il s'agit aura une valeur qui sera évidemment *plus grande* que celle de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \alpha S_{2n}(\tfrac{1}{2}).(-1)^n \varphi_{2n}(t)\,dt,$$

et en même temps, en vertu d'un théorème connu de M. Tchebychef, elle sera *moindre* que celle de l'expression

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \alpha S_{2n}(t)\,dt . \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)^n \varphi_{2n}(t)\,dt : \tfrac{1}{2},$$

où le premier facteur est égal à $\frac{\alpha}{h}[f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$, tandis que l'autre a pour valeur $\frac{1}{2}B_{2n-1}$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{B_{2n-1}h^{2n+1}}{(2n)!}&\sum_{k=0}^{m-1} \alpha f^{2n}(a+\tfrac{1}{2}h+kh)\\ &< -\alpha(-1)^n R_n < \frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)!}\alpha[f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)],\end{aligned}$$

à la seule condition que $S_{2n}(t)$ *conserve toujours le même signe et décroisse numériquement lorsque t croît de* o *à* $\frac{1}{2}$.

Si l'on admet que

$$\alpha f^{2n}(a+\tfrac{1}{2}h+kh) > \int_0^1 \alpha f^{2n}(a+\tfrac{1}{2}h+kh+ht)\,dt,$$

comme cela a lieu, par exemple, lorsque $\alpha f^{2n}(a+\frac{1}{2}h+z)$ est une fonction positive décroissante pour $0 < z < b - a$, nous aurons

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha f^{2n}(a + \tfrac{1}{2}h + kh) > \int_0^m \alpha f^{2n}(a + \tfrac{1}{2}h + ht)\,dt$$
$$= \frac{\alpha}{h}[f^{2n-1}(b + \tfrac{1}{2}h) - f^{2n-1}(a + \tfrac{1}{2}h)]$$

et, à plus forte raison,

$$-\alpha(-1)^n R_n > \frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)!}\alpha[f^{2n-1}(b + \tfrac{1}{2}h) - f^{2n-1}(a + \tfrac{1}{2}h)],$$

où l'on peut remplacer $f^{2n-1}(b + \frac{1}{2}h)$ par $f^{2n-1}(b)$. En ce cas, nous pouvons écrire

$$R_n = -(-1)^n \frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)!}[f^{2n-1}(b + \theta h) - f^{2n-1}(a + \theta h)], \qquad 0 < \theta < \tfrac{1}{2}.$$

Cette expression du reste remplace celle de Jacobi avec grand avantage, aussi bien au point de vue de la méthode que nous avons suivie qu'à celui des applications pratiques.

Pour le développement de $\log\Gamma(1 + x)$, on peut trouver

$$\log\Gamma(1 + x) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + (x + \tfrac{1}{2})\log x - x + \frac{B_1}{1.2}x^{-1} - \frac{B_3}{3.4}x^{-3} + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)}x^{-2n+3} - (-1)^n \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n}(x + \theta)^{-2n+1}$$

et, en particulier,

$$\Gamma(1 + x) = \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{(x+\theta)^{-1}}{12}}, \qquad 0 < \theta < \tfrac{1}{2}.$$

Cette formule doit désormais remplacer celle que l'on emploie ordinairement

$$\Gamma(1 + x) = \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Il est à remarquer que pour la plupart des applications suffit la formule

$$\Gamma(1 + x) = \sqrt{2\pi}\,(x + \theta)^{x+\frac{1}{2}}e^{-x-\theta}, \qquad 0 < \theta < \tfrac{1}{2},$$

équivalente aux inégalités

$$\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} < \Gamma(1+x) < \sqrt{2\pi}\,(x+\tfrac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}} e^{-x-\frac{1}{2}},$$

qui donnent déjà pour $x = 1$

$$\tfrac{4}{27} e^3 < \pi < \tfrac{1}{2} e^2,$$

c'est-à-dire

$$2,9756\ldots < \pi < 3,6945.$$

Varsovie, le 8 avril 1889.

Extrait d'une Lettre de M. Sonin à M. Hermite.

La question sur laquelle vous avez bien voulu appeler mon attention se résout assez facilement et plus avantageusement que ne permet de le faire l'application de la formule générale comme il suit.

Partant de la formule

$$\log\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + (x - \tfrac{1}{2})\log x - x + \frac{1}{\pi}\int_\infty^0 \log(1 - e^{-2\pi\xi})\,\frac{x\,d\xi}{x^2+\xi^2}$$

et employant l'identité élémentaire

$$\frac{x}{x^2+\xi^2} = \frac{1}{x} - \frac{\xi^2}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n \xi^{n-4}}{x^{2n-3}} - \frac{(-1)^n \xi^{2n-2}}{x^{2n-3}(x^2+\xi^2)},$$

on est conduit à discuter le reste

$$R_n = -\frac{(-1)^n}{\pi}\int_\infty^0 \log(1 - e^{-2\pi\xi})\,\frac{\xi^{2n-2}\,d\xi}{x^{2n-3}(x^2+\xi^2)},$$

où il est avantageux de poser $\xi = x\eta$ pour obtenir

$$-(-1)^n R_n = \frac{1}{\pi}\int_\infty^0 \eta^{2n-2}\log(1 - e^{-2\pi x\eta})\,\frac{d\eta}{1+\eta^2}.$$

La limite supérieure $\frac{1}{\pi}\int_\infty^0 \eta^{2n-2}\log(1 - e^{-2\pi x\eta})\,d\eta$ du second membre se trouve immédiatement. Quant à la limite inférieure, pour la déterminer, il faut développer le logarithme, ce qui donne

$$-(-1)^n R_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \eta^{2n-2} e^{-2\pi k x \eta} \frac{d\eta}{1+\eta^2}.$$

En considérant le terme général de cette série et le représentant sous la forme

$$\frac{1}{k} \int_0^{\infty} \eta^{2n-2} e^{-2\pi k(x+\alpha)\eta} \frac{e^{\pi k \alpha \eta}}{1+\eta^2} d\eta, \qquad \alpha > 0,$$

on voit tout de suite qu'il sera plus grand que

$$\frac{1}{k} \int_0^{\infty} \eta^{2n-2} e^{2-2\pi k(x+\alpha)\eta} d\eta,$$

lorsque, pour $\eta > 0$, on aura toujours

$$e^{2\pi k \alpha \eta} > 1 + \eta^2, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Il suffit évidemment que cette inégalité soit satisfaite pour $k = 1$.

En posant

$$Y = e^{2\pi\alpha\eta} - 1 - \eta^2,$$

on trouve

$$\frac{dY}{d\eta} = 2\pi\alpha e^{2\pi\alpha\eta} - 2\eta,$$

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} = (2\pi\alpha)^2 e^{2\pi\alpha\eta} - 2,$$

et, comme la dérivée $\frac{d^3 Y}{d\eta^3}$ reste toujours positive, on conclut que $\frac{d^2 Y}{d\eta^2}$ croît toujours depuis $(2\pi\alpha)^2 - 2$ jusqu'à ∞ pour les valeurs positives de η. Supposant

$$(2\pi\alpha)^2 < 2,$$

on trouve que $\frac{dY}{d\eta}$ atteint son minimum pour

$$(2\pi\alpha)^2 e^{2\pi\alpha\eta} = 2.$$

Ce minimum est égal à

$$\frac{1}{\pi\alpha} \left[1 - \log \frac{2}{(2\pi\alpha)^2} \right] = \frac{1}{\pi\alpha} \log 2 e \pi^2 \alpha^2,$$

et il sera positif lorsque $2e\pi^2\alpha^2 > 1$. En ce cas, la fonction $\frac{dY}{d\eta}$ reste toujours positive et, par conséquent, la fonction Y est croissante depuis $Y = 0$, c'est-à-dire aussi positive.

On en conclut que, pour $\alpha \geqq \frac{1}{\pi\sqrt{2e}}$, la valeur de l'expression $-(-1)^n R_n$ sera plus grande que

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^{\infty}\eta^{2n-2}e^{-2\pi(x+\alpha)\eta k}\,d\eta = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{0}\eta^{2n-2}\log[1-e^{-2\pi(x+\alpha)\eta}]\,d\eta.$$

On parvient ainsi au résultat suivant :

$$\log\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + \frac{B_1}{1.2}x^{-1} - \frac{B_3}{3.4}x^{-3} + \ldots$$
$$+ (-1)^n\left[\frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)}x^{-2n+3} - \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n}(x+\theta)^{-2n+1}\right],$$
$$0 < \theta < \frac{1}{\pi\sqrt{2e}} = 0,136\ldots.$$

Je profite de cette occasion pour vous communiquer un autre résultat relatif à la fonction $\Gamma(x)$, à savoir : si l'on pose

$$\Omega = \log\Gamma(1+x) - \log\Gamma(1+p+x) + p\log\left(x+\frac{p+1}{2}\right),$$

on aura

$$p^2 < 1,$$
$$\frac{1}{24}\left(x+1+\frac{p}{2}\right)^{-2} < \frac{\Omega}{p(p^2-1)} < \frac{1}{24}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{-2};$$
$$p^2 > 1,$$
$$\frac{1}{24}\left(x+1+\frac{p}{2}\right)^{-2} < \frac{\Omega}{p(p^2-1)} < \frac{1}{24}\left(x+\frac{p+1}{2}-\frac{1}{2}|p|\right)^{-2}.$$

La démonstration de ces formules se trouve dans un Mémoire assez étendu *Sur la fonction discontinue* $[x]$ *et ses applications*, qui paraîtra sous peu dans les *Annales de l'Université de Varsovie*.