MAURICE FRÉCHET

Sur l'approximation des fonctions continues périodiques par les sommes trigonométriques limitées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 43-56.
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__43_0>

SUR L'APPROXIMATION

DES

FONCTIONS CONINTUES PÉRIODIQUES

PAR LES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES LIMITÉES,

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

1. Tchebicheff [1] a montré que, étant donnée une fonction continue quelconque $f(x)$ définie dans un intervalle donné (a, b), il existe pour chaque valeur de n un polynome de degré n qui est plus voisin de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) que tout autre polynome de degré n. Sa méthode, perfectionnée par Kircherberger [2], se trouve exposée en toute rigueur dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. Borel, auxquelles nous aurons encore à renvoyer dans ce qui suit.

Nous commencerons par énoncer sous une forme plus générale les résultats obtenus par Tchebicheff. Il suffit de quelques modifications aux démonstrations développées dans les *Leçons* de M. Borel (p. 83-92) pour obtenir cette généralisation qui constituera la première Partie de ce Mémoire. Au contraire, nous nous écarterons dans la seconde Partie des raisonnements de Tchebicheff et nous appliquerons les résultats obtenus en choisissant comme fonction approchée non plus un poly-

---

(1) *Bulletin de la Société physico-mathématique de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, 1858, col. 145-149. *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. IX, 1859, p. 201-291.

(2) *Inaugural-Dissertation : Ueber Tchebychefsche Annähenungs-methoden*, Göttingen, 1902.

nome, mais une somme trigonométrique de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Il est d'ailleurs probable que les modifications introduites dans notre première Partie aux énoncés de Tchebicheff permettraient aussi de les appliquer dans d'autres cas intéressants (¹).

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE TCHEBICHEFF.

2. Soit $f(x)$ une fonction définie et bornée dans l'intervalle (a, b). Soit d'autre part $\mathcal{F}_p$ une famille de fonctions continues de x

$$S(x, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

dépendant de $p+1$ paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (²), et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p, \ldots$. Nous supposerons seulement aux fonctions S les propriétés suivantes :

I. La somme ou la différence de deux fonctions de $\mathcal{F}_p$ appartient à $\mathcal{F}_p$.

II. Lorsque p reste fixe, $|S(x, \lambda'_0, \ldots, \lambda'_p) - S(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_p)|$ tend vers zéro, uniformément par rapport à x, lorsque la plus grande des quantités $|\lambda'_0 - \lambda_0|, \ldots, |\lambda'_p - \lambda_p|$ tend vers zéro dans (a, b).

III. Lorsque p reste fixe et que les λ varient de façon qu'on ait en

---

(¹) Cet article est le développement d'une Note de l'auteur, *Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées* (*Comptes rendus*, 21 janvier 1907). *Après* la publication de cette Note est paru un Mémoire de J.-W. YOUNG, intitulé : *General theory of approximation by functions involving a given number of arbitrary parameters*, dans le numéro de juillet 1907, p. 331, des *Transactions of the American mathematical Society*. Cet intéressant Mémoire examine le problème actuel à un point de vue analogue et le généralise en faisant intervenir des opérations linéaires. Mais les raisonnements employés et les résultats obtenus sont assez différents des nôtres pour que le travail actuel ne fasse pas avec lui double emploi.

(²) Tchebicheff prend en particulier pour famille $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des polynomes de degré p.

tout point de (a, b)

$$|S(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_p)| < M \qquad (\text{M nombre fixe quelconque}),$$

les λ restent bornés dans leu. ensemble.

Premier lemme. — *Sous ces hypothèses, on voit d'abord que*

$$|f(x) - S(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_p)|$$

a une limite supérieure déterminée $m(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$ *lorsque, les* λ *restant fixes,* x *varie dans* a, b. *La quantité* $m(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \geqq 0$ *a elle-même une limite inférieure* $\mu \geqq 0$ *lorsque,* p *restant fixe,* $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ *varient de façon quelconque. Si la limite* μ *est atteinte pour une fonction* $S(x, k_0, \ldots, k_p)$ *de* $\mathfrak{F}_p$, *nous dirons que* $S(x, k_0, \ldots, k_p)$ *est une* fonction d'approximation *de* $f(x)$ *dans* $\mathfrak{F}_p$. *Le problème de Tchebicheff consiste à déterminer s'il existe au moins une telle fonction et, dans ce cas, s'il en existe plus d'une.*

En se reportant à l'Ouvrage cité et moyennant les hypothèses II et III faites sur les fonctions S, on verra sans difficulté (p. 83) qu'il en existe bien au moins une et ceci quel que soit p.

Les deux lemmes qui vont suivre servent à décider s'il en existe plus d'une.

Deuxième lemme. — *Nous supposerons maintenant que* la fonction $f(x)$ est continue. *Si l'on se reporte à l'Ouvrage cité, on constate que, si* $S(x, l_0, \ldots, l_p)$ *est une fonction de* $\mathfrak{F}_p$ *et si* δ *est un nombre positif assez petit, on peut former une suite de nombres croissants* $a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, b$ *jouissant des propriétés suivantes :*

Soit A' *l'ensemble des valeurs* α' *de* x *telles que* $y(\alpha') = m$ [*en posant* $y(x) = f(x) - S(x, l_0, \ldots, l_p)$ *et appelant* m *le maximum de* $|y(x)|$ *dans* (a, b)] *et soit* A'' *l'ensemble des valeurs* α'' *telles que* $y(\alpha'') = -m$. *Soient de plus* $L_1, \ldots, L_p$ *les intervalles contigus déterminés par les nombres* a, ξ *et* b. *Ceci posé, tous les* α' *sont dans des intervalles* L *dont les indices sont de même parité; les* α'' *sont dans les intervalles de parité différente de la précédente et il y a au moins un* α' *ou un* α'' *dans chaque intervalle* L. *De plus, les nombres* ξ *diffèrent de plus de* δ *des nombres* α' *ou* α''; *et il en est de même de* a *quand* $|y(a)| \neq m$ *et de* b *quand*

$|y(b)| \neq m$; *enfin l'on a*

$$|y(x)| > \frac{m}{2} \quad \text{pour} \quad |x-\alpha'| < \delta \quad \text{ou} \quad |x-\alpha''| < \delta.$$

On peut ajouter que, si y est une fonction périodique de période $(b-a)$ et q pair, il est impossible que $|y(x)| = m$ à l'une des extrémités a, b.

Ceci étant, on pourra choisir dans chacun des intervalles I_i un nombre α_i tel que

$$y(\alpha_1) = \varepsilon m, \quad y(\alpha_2) = -\varepsilon m, \quad y(\alpha_3) = \varepsilon m, \quad \ldots, \quad y(\alpha_q) = (-1)^{q+1}\varepsilon m$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

On aura

$$a \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \alpha_2 < \xi_2, \quad \ldots, \quad < \xi_{q+1} < \alpha_q \leqq b,$$

et, dans le cas particulier où q est pair et y de période $(b-a)$, on aura certainement

$$a < \alpha_1, \quad \alpha_q < b.$$

TROISIÈME LEMME. — *Soit maintenant*

$$S(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_q)$$

une fonction de $\mathfrak{F}$ *telle que le maximum* m_1 *de*

$$|f(x) - S(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_q)|$$

dans (a, b) *soit inférieur ou simplement égal à* m. *On voit qu'il existera une fonction de* $\mathfrak{F}$

$$\psi(x) \equiv \varepsilon[S(x, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q) - S(x, l_0, \ldots, l_p)]$$

telle qu'on ait

$$(1) \qquad \psi(\alpha_1) \geqq 0, \quad \psi(\alpha_2) \leqq 0, \quad \psi(\alpha_3) \geqq 0, \quad \ldots.$$

QUATRIÈME LEMME. — *Soit* $\omega(x)$ *une fonction de* x *continue, jamais négative et telle qu'on ait*

$$\omega(x) > A$$

(A *nombre positif fixe*), *quel que soit* x, *vérifiant l'une des inégalités*

$$|x-\alpha'| < \frac{\delta}{2} \quad \text{ou} \quad |x-\alpha''| < \frac{\delta}{2}.$$

Supposons qu'on puisse déterminer une fonction $\omega(x)$ satisfaisant à ces conditions et telle que, quelle que soit la constante η, la fonction

$$Q(x) \equiv \eta(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{q-1})\,\omega(x) \tag{2}$$

soit une fonction de $\mathfrak{F}$.

Si l'on prend pour η un nombre assez petit en valeur absolue et d'un signe convenable, on verra (*loc. cit.*, p. 85) *que la fonction*

$$R(x) \equiv Q(x) + S(x, l_0, \ldots, l_p)$$

est une fonction de $\mathfrak{F}$ telle que le maximum de $|f(x) - k(x)|$ soit inférieur à m.

Le dernier lemme est destiné à faire voir comment varient les fonctions d'approximation de fonctions variables.

Cinquième lemme. — *Soient $T_p(x)$ et $T_p + \Delta T_p$ deux fonctions d'approximation dans $\mathfrak{F}_p$ de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ telles qu'on ait dans (a, b)*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Si l'on n'a pas $|\Delta T_p(x)| < 2\varepsilon$ pour tous les points de l'un au moins des intervalles $H_i(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$, on voit (*loc. cit.*, p. 90) *qu'il existe alternativement un maximum ou un minimum de $\Delta T_p(x)$ dans chacun des intervalles*

$$(\alpha_1, \alpha_3), \quad (\alpha_2, \alpha_4), \quad \ldots, \quad (\alpha_{q-2}, \alpha_q).$$

On peut même ajouter que, si $y = [f(x) - T_p(x)]$ est de période 2π et q pair, le même genre de démonstration prouve que, si l'on n'a pas $|\Delta T_p(x)| < 2\varepsilon$ pour tous les points de l'un au moins des intervalles $H_1, \ldots, H_{q-1}$ ou $H_0(a, \alpha_1)$ ou $H_q(\alpha_q, b)$ (lesquels ne sont pas réduits à des points), le résultat précédent s'applique encore en ajoutant à la suite des intervalles (α_1, α_3), (α_2, α_4), ... les intervalles $(\alpha_{q-1}, \alpha_1 + b - a)$, $(\alpha_q, \alpha_2 + b - a)$. Il y a donc dans le cas général au moins $q-2$ et dans ce cas particulier au moins q minima ou maxima distincts de $\Delta T_p(x)$ dans (a, b).

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS AU CAS OU L'ON PREND COMME FONCTIONS APPROCHÉES DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES.

3. Prenons en particulier pour fonctions S des sommes trigonométriques limitées

$$\begin{aligned} & S(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2k}) \\ & \quad = \frac{\lambda_0}{2} + (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x) + \ldots + (\lambda_{2k-1} \cos kx + \lambda_{2k} \sin kx), \end{aligned}$$

et supposons $a = 0$, $b = 2\pi$.

Ces fonctions satisfont évidemment aux propriétés I, II que doit vérifier toute fonction S. Quant à la propriété III, elle résulte des formules connues

$$\lambda_{2r-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S \cos rx \, dx, \qquad \lambda_{2r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S \sin rx \, dx \qquad (r = 0, \ldots, k),$$

d'où l'on déduit, si $|S| < M$, par le théorème de la moyenne,

$$|\lambda_{2r-1}| < 2M, \qquad |\lambda_{2r}| < 2M \qquad (r = 0, \ldots, k).$$

Il en résulte que d'après le premier lemme : *si $f(x)$ est une fonction définie et bornée dans l'intervalle $0, 2\pi$, il existe, pour chaque valeur de l'entier n, au moins un système de $2n+1$ nombres $u_0, u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ tels que la limite supérieure μ dans $(0, 2\pi)$ de*

$$|f(x) - (u_0 + u_1 \cos x + v_1 \sin x + \ldots + u_n \cos nx + v_n \sin nx)|$$

soit au plus égale à la limite supérieure m dans $(0, 2\pi)$ de

$$|f(x) - (A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \ldots + A_n \cos nx + B_n \sin nx)|,$$

où $A_0, A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ sont $2n+1$ constantes quelconques.

Nous appellerons alors la fonction

$$T_n(x) = u_0 + u_1 \cos x + \ldots + v_n \sin nx$$

une somme trigonométrique d'approximation de $f(x)$ d'ordre n.
S'il existe deux telles fonctions

$$T_n(x) \quad \text{et} \quad K_n(x),$$

il en existera une infinité.

En effet, toutes les fonctions

$$H(x) \equiv \cos^2\varphi\, T_n(x) + \sin^2\varphi\, K_n(x),$$

où φ est une constante quelconque, sont des sommes trigonométriques d'ordre n; on a

$$|f(x) - H(x)| = |\cos^2\varphi\,[f(x) - T_n(x)] + \sin^2\varphi\,[f(x) - K_n(x)]| \leqq \mu.$$

Donc, quel que soit φ, $H(x)$ est une somme trigonométrique d'approximation de $f(x)$ d'ordre n.

4. Nous allons maintenant déterminer un cas où il existe une seule fonction d'approximation en appliquant les deuxième, troisième et quatrième lemmes au cas où $f(x)$ est une fonction *continue*.

Sous cette condition, on peut appliquer le deuxième lemme et former un nombre fini q d'intervalles $L_1, L_2, \ldots, L_q$ jouissant des propriétés indiquées, relativement à une somme trigonométrique déterminée :

$$F_n(x) \equiv A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \ldots + A_n \cos nx + B_n \sin nx.$$

Soit m le maximum de $|f(x) - F_n(x)|$ dans $(0, 2\pi)$. Je dis que, s'il existe une autre somme d'ordre n, $G_n(x)$, telle que le maximum m_1 de $|f(x) - G_n(x)|$ soit $\leqq m$, le nombre q des intervalles L est $\leqq 2n + 1$. En effet, d'après le troisième lemme, il existera une somme trigonométrique $\psi(x) \equiv a_n(x) - F_n(x)$ vérifiant les relations (1) en nombre q, qui entraîne l'existence d'au moins $q - 1$ racines égales ou inégales de $\psi(x)$. Or $\psi(x)$, étant d'ordre n au plus, admet au plus $2n$ racines égales ou inégales (non congrues, module 2π). Donc

$$q - 1 \leqq 2n.$$

5. Inversement, appliquons maintenant le quatrième lemme à une somme trigonométrique quelconque $Z_n(x)$ telle que le nombre q des intervalles L correspondants soit $\leq 2n+1$. Supposons d'abord q impair : $q = 2h+1$; alors l'expression

$$Q(x) = \eta\left[\sin\left(\frac{x-\xi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\xi_2}{2}\right)\right]\cdots\left[\sin\left(\frac{x-\xi_{2h-1}}{2}\right)\sin\frac{x-\xi_{2h}}{2}\right]$$

est une somme trigonométrique d'ordre h, comme on le voit en mettant chacun des h facteurs $\left(\sin\frac{x-\xi_{2k-1}}{2}\sin\frac{x-\xi_{2k}}{2}\right)$ sous la forme

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\xi_{2k}-\xi_{2k-1}}{2} - \cos\left(x - \frac{\xi_{2k}+\xi_{2k-1}}{2}\right)\right]$$

et en développant. D'autre part, on peut mettre $Q(x)$ sous la forme (2) en posant

$$\omega(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-\xi_1}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{x-\xi_{q-1}}{2}\right)}{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{q-1})},$$

lorsque x est distinct de $\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}$, et

$$\omega(\xi_k) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\xi_k-\xi_1}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{\xi_k-\xi_{k-1}}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi_k-\xi_{k+1}}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{\xi_k-\xi_{q-1}}{2}\right)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_{q-1})}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q-1).$$

On voit que $\omega(x)$ est une fonction continue de x; de plus, si ρ_k est la plus petite des quantités positives $\frac{\sin\left(\frac{\xi_k}{2}\right)}{\xi_k}$ et $\frac{\sin\left(\frac{\xi_k}{2}\right)}{\pi-\xi_k}$, on aura, quel que soit x entre 0 et 2π,

$$\omega(x) > \rho_1\rho_2\ldots\rho_{q-1}.$$

Donc $\omega(x)$ satisfait aux conditions du troisième lemme; par suite, en prenant η assez petit en valeur absolue et d'un signe convenable, on obtiendra une fonction

$$R(x) = Q(x) + Z_n(x)$$

telle que le maximum de $|f(x) - R(x)|$ dans $(0, 2\pi)$ soit inférieur au maximum de $|f(x) - Z_n(x)|$. Or $Q(x)$ étant d'ordre h sera, d'après l'hypothèse, au plus d'ordre n, et, en prenant η assez petit, $R(x)$ sera certainement du même ordre que $Z_n(x)$. Donc $Z_n(x)$ n'est pas une somme trigonométrique d'approximation.

Supposons maintenant q pair : $q = 2h < 2n + 1$ et *admettons maintenant que $f(x)$ soit une fonction périodique de période* 2π. Alors, nous prendrons

$$Q(x) \equiv \eta \left[\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x-\xi_1}{2}\right)\right]$$
$$\times\left[\sin\left(\frac{x-\xi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\xi_3}{2}\right)\right]\cdots\left[\sin\left(\frac{x-\xi_{q-2}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\xi_{q-1}}{2}\right)\right].$$

On verra encore que $Q(x)$ est une somme trigonométrique d'ordre h. La fonction $\omega(x)$ sera encore une fonction continue jamais négative; mais elle sera nulle pour $x = 0$ ou 2π. Seulement $[f(x) - Z_n(x)]$ étant une fonction de période 2π et q pair, les extrémités 0, 2π n'appartiendront ni à A', ni à A''. Alors, d'après le deuxième lemme, on aura

$$|\alpha'| > \delta, \qquad |\alpha''| > \delta, \qquad |2\pi - \alpha'| > \delta, \qquad |2\pi - \alpha''| > \delta;$$

donc les inégalités $|x - \alpha'| < \frac{\delta}{2}$ ou $|x - \alpha''| < \frac{\delta}{2}$ entraînent $x > \frac{\delta}{2}$ et $2\pi - x > \frac{\delta}{2}$.

Il en résulte qu'elles entraînent aussi

$$\omega(x) > \left(\sin\frac{\delta}{4}\right)\rho_1\rho_2\ldots\rho_{q-1}.$$

Donc $\omega(x)$ vérifie les conditions du troisième lemme et l'on arrive à la même conclusion que précédemment.

En résumé, que q soit pair ou non, *si $f(x)$ est une fonction continue et de période 2π, il faut, pour que $Z_n(x)$ soit une somme trigonométrique d'approximation d'ordre n, que l'on ait $q > 2n + 1$. D'ailleurs cela suffit*, car, s'il existait une somme d'ordre n distincte de Z_n et différant moins de $f(x)$ que Z_n, on aurait $q \leqq 2n + 1$, comme on l'a démontré plus haut.

7. De plus, nous avons vu que, pour chaque valeur de x, il existe au moins une somme d'approximation d'ordre n qui, d'après ce qui précède, correspondra à $q > 2n + 1$. Mais nous avons vu aussi que, s'il y avait une autre somme d'approximation, on aurait $q \leq 2n + 1$. Donc :

Si $f(x)$ est une fonction continue et de période 2π, et n un entier quelconque, il y a une *somme trigonométrique d'ordre n*

$$T_n(x) \equiv u_0 + u_1 \cos x + v_1 \sin x + \ldots + u_n \cos nx + v_n \sin nx$$

qui approche plus de $f(x)$ que toute autre somme trigonométrique d'ordre n. Autrement dit, quelle que soit la somme trigonométrique d'ordre n :

$$F_n(x) \equiv A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \ldots + A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

le maximum de $|f(x) - F_n(x)|$ sera supérieur (et non pas égal) au maximum de $|f(x) - T_n(x)|$.

8. Appliquons maintenant le cinquième lemme et soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions continues de période 2π telles que, quel que soit x,

$$(3) \qquad |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

D'après ce qui précède, à chacune d'elles correspond une somme trigonométrique d'approximation d'ordre *n bien déterminée* $T_n(x)$ et

$$T_n(x) + \Delta T_n(x) \equiv (u_0 + \Delta u_0) + (u_1 + \Delta u_1) \cos x + \ldots + (v_n + \Delta v_n) \sin nx.$$

Je dis que la correspondance établie ainsi entre $f(x)$ et $T_n(x)$ est continue, autrement dit, que l'on peut choisir ε assez petit pour que l'on ait

$$(4) \qquad |\Delta u_0| < \eta, \qquad |\Delta u_1| < \eta, \qquad |\Delta v_1| < \eta, \qquad \ldots, \qquad |\Delta v_n| < \eta,$$

lorsque, $f(x)$ étant fixe, $g(x)$ vérifie l'inégalité (3).

En effet, appliquons le cinquième lemme en remarquant que les intervalles H_i employés sont indépendants de $g(x)$. D'après ce lemme, on aura $|\Delta T_n(x)| < 2\varepsilon$ en tous les points d'un intervalle H_i non réduit à un point. En effet, dans le cas où q est impair, si l'on n'avait pas $|\Delta T_n(x)| < 2\varepsilon$ en tous les points de $H_1, H_2, \ldots, H_{q-1}$, $\Delta T_n(x)$ serait une somme trigonométrique d'ordre n au plus qui aurait au moins $q-2$ maxima ou minima distincts. Dans le cas où q est pair, si l'on n'avait pas $|\Delta T_n(x)| < 2\varepsilon$ en tous les points de l'un des intervalles H_0, $H_1, \ldots, H_{q-1}, H_q$, $\Delta T_n(x)$ aurait au moins q maxima et minima distincts. Or, dans les deux cas, la dérivée de ΔT_n est d'ordre n au plus, elle a donc au plus $2n$ racines et, par suite, ou bien q serait impair et au plus égal à $2n+2$, ou bien q serait pair et au plus égal à $2n$. On aurait donc dans les deux cas $q < 2n+1$. Cela est impossible, puisque T_n est une somme trigonométrique d'approximation d'ordre n. D'autre part, nous savons que les seuls intervalles qui pourraient se réduire à un point, H_0 et H_q, ne le font pas si q est pair et f de période 2π.

Ceci étant, prenons, dans chacun des intervalles H_i, $2n+1$ points distincts $x_1^{(i)}, \ldots, x_{2n+1}^{(i)}$. D'après ce qui précède, $\Delta T_n(x)$ pourra s'écrire sous l'une des formes $\psi_i(x)$ obtenues en donnant à i l'une des valeurs $1, 2, \ldots, q-1$ si q est impair, $0, 1, \ldots, q$ si q est pair, dans la formule

$$\psi_i(x) \equiv \sum_{h=1}^{h=2n+1} u_h^{(i)} \frac{\sin\left(\frac{x-x_1^{(i)}}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{x-x_{h-1}^{(i)}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_{h+1}^{(i)}}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{x-x_{2n+1}^{(i)}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_h^{(i)}-x_1^{(i)}}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{x_h^{(i)}-x_{h-1}^{(i)}}{2}\right)\sin\left(\frac{x_h^{(i)}-x_{h+1}^{(i)}}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{x_h^{(i)}-x_{2n+1}^{(i)}}{2}\right)},$$

avec $|u_h^{(i)}| < 2\varepsilon$.

Si l'on développe $\psi_i(x)$ sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\psi_i(x) \equiv \sum_{h=1}^{h=2n+1} u_h^{(i)} \quad & [A_0^{(i,h)} + A_1^{(i,h)}\cos x + B_1^{(i,h)}\sin x + \ldots + A_n^{(i,h)}\cos nx + B_n^{(i,h)}\sin nx] \\ & \equiv A_0^{(i)} + A_1^{(i)}\cos x + B_1^{(i)}\sin x + \ldots + A_n^{(i)}\cos nx + B_n^{(i)}\sin nx,\end{aligned}$$

on voit que les quantités $A_r^{(i,h)}$, $B_r^{(i,h)}$ sont indépendantes de la fonction $g(x)$. Comme il y en a un nombre fini, leurs valeurs absolues sont inférieures (quels que soient i, r, h dans leurs limites respectives) à un même nombre P. Donc, on a (quels que soient i, r dans leurs limites respectives)

$$|A_r^{(i)}| < 2\varepsilon P, \qquad B_r^{(i)} < 2\varepsilon P.$$

Comme $\Delta T_n(x)$ est identique à l'une des fonctions $\psi_i(x)$, on voit qu'on aura bien les inégalités (4) en prenant $\varepsilon < \frac{\eta}{2P}$.

9. *Limite de sommes trigonométriques d'approximation d'ordres croissants.* — Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π. Quel que soit l'entier n, elle a une somme trigonométrique d'approximation d'ordre n bien déterminée $T_n(x)$; soit μ_n le maximum de $|f(x) - T_n(x)|$. D'après la définition de $T_n(x)$, on a

$$\mu_0 \geqq \mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_n \geqq \ldots \geqq 0.$$

Les nombres μ_n tendent donc en décroissant vers une limite $\geqq 0$. *Cette limite est nulle.* En effet, soit

$$s_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

la somme des n premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$. On sait (¹) que la somme trigonométrique d'ordre n

$$\sigma_n(x) = \frac{n s_0(x) + (n-1) s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n}$$

converge uniformément vers $f(x)$. Donc, le maximum m_n de $|f(x) - \sigma(x)|$ tend vers zéro. Or, d'après la définition de $T_n(x)$, $\mu_n \leqq m_n$.

Ainsi, *la suite des sommes trigonométriques d'approximation d'ordres croissants de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$.* Et même elle converge au moins aussi vite que la somme $\sigma_n(x)$ de Féjer.

10. Il en résulte immédiatement que *les coefficients de la somme trigonométrique d'approximation d'ordre n de $f(x)$ tendent respectivement et uniformément vers les coefficients de Fourier de $f(x)$ lorsque n tend vers l'infini.* En effet, on a

$$\alpha_p - a_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [T_n(x) - f(x)] \cos px \, dx;$$

(¹) *Voir* H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 96-98.

donc

$$|u_p - a_p| < 2\mu_n$$

et de même

$$|v_p - e_p| < 2\mu_n.$$

Cette propriété amène à se demander si les coefficients de $T_n(x)$ ne seraient pas exactement égaux aux $2n+1$ premiers coefficients de Fourier de $f(x)$. Mais il est évident que cela est impossible, puisque la série de Fourier de $f(x)$ ne converge pas toujours vers $f(x)$.

On pourrait alors se demander, pour éviter cette objection, si les coefficients de $T_n(x)$ ne seraient pas ceux de la somme $\sigma_n(x)$ de M. Féjer, lesquels tendent aussi vers les coefficients de Fourier. Il n'en est pas ainsi et l'*on peut même répondre par la négative à cette question plus générale : Est-ce que les coefficients de* $T_n(x)$ *dépendent seulement des* $2n+1$ *premiers coefficients de la série de Fourier de* $f(x)$? En effet, s'il en était ainsi, la somme d'approximation d'ordre n, T_n, de $f(x)$ serait la même que celle de $s_n(x)$, somme des n premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$. Or, la somme d'approximation d'ordre n de $s_n(x)$ est évidemment $s_n(x)$ elle-même. On aurait donc $T_n(x) \equiv s_n(x)$, et nous avons vu que cela est impossible en général.

Il en résulte en particulier que $T_n(x)$ n'est pas identique en général à $\sigma_n(x)$ et, par conséquent, qu'on a $\mu_n < m_n$. Ainsi, *la suite des sommes trigonométriques d'approximation d'ordres croissants d'une fonction continue périodique* $f(x)$ *est une suite bien déterminée, seule de son espèce et qui converge uniformément vers* $f(x)$ *plus rapidement, en général, que toute autre suite de sommes trigonométriques d'ordres croissants et en particulier que la suite des sommes* $\sigma_n(x)$ *de Féjer.*

11. *Calcul des coefficients d'une somme trigonométrique d'approximation.* — La recherche de la somme trigonométrique d'approximation $T_n^{(p)}(x)$ d'ordre n d'une somme trigonométrique limitée $\sigma_p(x)$ peut être évidemment ramenée à un problème algébrique en posant $t = \operatorname{tang} \frac{x}{2}$. Si, d'autre part, $\sigma_p(x)$ est la somme de Fejer de $f(x)$, les coefficients de $T_n^{(p)}$ seront aussi approchés qu'on le voudra de ceux de $T_n(x)$ en prenant p assez grand. Ceci revient à dire que si l'on sait calculer les coefficients de $T_n^{(p)}$ on saura calculer ceux de $T_n(x)$. Donc :

Si une fonction continue de période 2π est donnée de façon qu'on sache calculer ses coefficients de Fourier, la détermination des sommes trigonométriques d'approximation de $f(x)$ n'exigera, en outre, que des opérations algébriques.

12. *Application aux fonctions harmoniques à l'intérieur d'un cercle.* — Soient $V(x, y)$, $V_n(x, y)$ deux fonctions harmoniques et régulières à l'intérieur d'un cercle C prenant sur ce cercle une suite continue de valeurs $f(\varphi)$, $S_n(\varphi)$. Si $V_n(x, y)$ est un polynome, $S_n(\varphi)$ sera une somme trigonométrique limitée d'ordre n égal au degré de V_n et le maximum de $|V_n(x, y) - V_{x,y}|$ à l'intérieur de C sera égal au maximum de $|S_n(\varphi) - f(\varphi)|$ sur C. Donc : *Étant donnée une fonction $V(x, y)$ harmonique et régulière dans un cercle C et continue sur C, il existe, pour chaque valeur de n, un polynome harmonique de degré n, T_n, qui approche plus de $V(x, y)$ dans C que tout autre polynome harmonique de degré n* [c'est-à-dire tel que le maximum de $|T_n(x, y) - V(x, y)|$ dans C soit plus petit que celui de $|V_n(x, y) - V(x, y)|$]. De plus, *pour n fixe, la correspondance ainsi établie entre $V(x, y)$ et $T_n(x, y)$ est continue.* C'est-à-dire que, si $V(x, y)$ tend uniformément dans C et sur C vers une fonction analogue $W(x, y)$, les coefficients de $T_n(x, y)$ tendront uniformément vers ceux du polynome de degré n qui correspond à $W(x, y)$.