Annales scientifiques de l'É.N.S.

Émile Picard

Sur certaines équations aux dérivées partielles se rattachant à un problème d'équilibre calorifique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 43 (1926), p. 369-371.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1926_3_43__369_0>

SUR

CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SE RATTACHANT A UN PROBLÈME D'ÉQUILIBRE CALORIFIQUE

PAR M. ÉMILE PICARD

1. Dans des travaux déjà anciens, je me suis occupé de l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors [1]. On est ainsi conduit pour une surface dont l'arc est donné par

$$ds^2 = \mathrm{E}\,dp^2 + 2\mathrm{F}\,dp\,dq + \mathrm{G}\,dq^2$$

à l'équation différentielle relative à la température u :

$$\Delta u = c(p, q)\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,.\,u, \tag{1}$$

où

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial u}{\partial p} - \mathrm{F}\dfrac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{-\mathrm{F}\dfrac{\partial u}{\partial p} + \mathrm{E}\dfrac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\right),$$

$c(p, q)$ désignant une fonction positive sur la surface.

On démontre l'existence d'une solution de l'équation (1), uniforme et continue sur la surface, sauf en un point singulier logarithmique qui correspond à une source avec un flux donné. En supposant le flux égal à 2π, et en désignant par (p', q') le point singulier, nous repré-

---

(1) E. PICARD, *Sur l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors* (*Comptes rendus*, t. 130, 1900, p. 1499); *Sur une équation aux dérivées partielles correspondant à un équilibre calorifique* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. XXV, 1909, p. 9). J'ai en outre développé ces questions dans mon cours de 1908.

senterons cette solution par

$$u(p, q; p', q');$$

elle est d'ailleurs symétrique en (p, q) et (p', q').

Envisageons maintenant l'équation

$$\Delta V = \lambda . c . \sqrt{EG - F^2} . V, \tag{2}$$

λ étant un paramètre constant. La recherche de l'intégrale de l'équation (2), uniforme et partout continue sur la surface, se ramène à la résolution de l'équation intégrale de seconde espèce sans second membre

$$2\pi V(p', q') + (\lambda - 1) \int\int c(p, q) . u(p, q; p', q') . V(p, q) \, d\sigma = 0, \tag{3}$$

l'intégrale étant étendue à la surface, et $d\sigma$ étant l'élément d'aire.

Les valeurs singulières de $\lambda - 1$, relatives à cette équation du type de Fredholm, correspondent aux valeurs négatives de λ en nombre infini pour lesquelles l'équation (2) admet des intégrales uniformes et partout continues.

2. On sait qu'à une surface fermée présentant p trous, correspond une courbe algébrique de genre p. Supposons les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe exprimées par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre $z = x + iy$, définies dans le demi-plan supérieur. Si l'on applique à ce cas les résultats précédents, on est conduit à considérer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{c(x, y)\, u}{y^2}, \tag{4}$$

$c(x, y)$ étant une fonction positive continue dans le demi-plan et restant invariable par les substitutions effectuées sur x et y, qui correspondent au groupe fuchsien envisagé. L'équation (4) admet une intégrale invariable par les substitutions de ce groupe, et partout continue sauf en un point d'un polygone fondamental et ses homologues, où elle a des singularités logarithmiques.

Pareillement l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\lambda c V}{y^2}$$

admet pour certaines valeurs négatives de λ en nombre infini des intégrales invariables par les substitutions du groupe et partout continues.

3. Le cas de $p = 1$ correspond à une périodicité par rapport à chacune des variables. On a alors l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda\, c(x, y)\, u,$$

la fonction $c(x, y)$ admettant respectivement les périodes a et b pour les variables. Si c est une constante, la recherche des valeurs de λ correspondant à des solutions du type indiqué au paragraphe précédent est immédiate. Ainsi, avec $a = b = 2\pi$ et $c = 1$, on a pour les valeurs singulières

$$\lambda = -(m^2 + n^2) \qquad (m \text{ et } n \text{ entiers}),$$

et la solution correspondante s'exprime par des sinus et des cosinus.

On a ici facilement l'équation de Fredholm analogue à l'équation (3). Il suffit de se rappeler (¹) que l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u,$$

admettant les périodes a et b respectivement pour x et y, et ayant comme points singuliers logarithmiques le point (α, β) et ses homologues dans les rectangles des périodes, est donnée par la formule

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\Theta(z, x, y)}{\sqrt{z^2 - 1}}\, dz,$$

où

$$\Theta(z, x, y) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{z\sqrt{(x-\alpha-ma)^2+(y-\beta-nb)^2}},$$

fonction qui est définie pour z négatif.

(¹) E. Picard, *Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 28, 1900, p. 186).