Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

G. Sorani

Omologia degli spazi q-pseudoconvessi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 3 (1962), p. 299-304.

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_299_0>

OMOLOGIA DEGLI SPAZI q-PSEUDOCONVESSI (*)

di G. SORANI (a Roma)

1. — Introduzione.

Sia D un aperto di $\mathbf{C}^n$; una funzione $\varphi : D \to \mathbf{R}$ si dice *fortemente plurisubarmonica* se la forma di Levi $\mathcal{L}(\varphi) = \partial \bar{\partial} \varphi$ è definita positiva in ogni punto di D.

La funzione φ si dice *fortemente q-plurisubarmonica* ($q > 0$) se la forma $\mathcal{L}(\varphi)$ ha $n - q + 1$ valori propri positivi.

Sia X una varietà complessa di dimensione complessa n; X si dice *q-pseudoconvessa* se esistono un compatto $K \subset X$ ed una funzione continua $\varphi : X \to \mathbf{R}$, tali che:

i) $\varphi |_{X-K}$ sia fortemente q-plurisubarmonica,

ii) per ogni $c \in \mathbf{R}$, gli insiemi $B_c = \{ P \in X \mid \varphi(P) < c \}$ siano relativamente compatti in X.

Se $K = \Phi$, X si dice *q-completa*; se inoltre è $q = 1$, X è una varietà di Stein (cfr. A. Andreotti e H. Grauert [1] e H. Grauert [5]).

I punti $P \in X - K$ nei quali grad $\varphi = 0$ si chiamano punti critici di φ su $X - K$.

Un punto critico P si dice non degenere se l'hessiano $H(\varphi)_P$ è una forma quadratica non degenere; in tale caso il numero dei valori propri negativi di $H(\varphi)_P$ si chiama indice del punto critico P e si designa con $i(P)$.

Detto M_i il numero dei punti critici di indice i, sussiste la disuguaglianza di Morse:

$$M_i \geq \dim H_i(X, k),$$

ove k è un qualsiasi corpo di coefficienti.

(*) Lavòro eseguito nel Gruppo di Ricerca n. 35 del C. M. C. N. R. (anno accademico 1962-63).

In questa nota mostreremo che, se X è una varietà q-pseudoconvessa e $c > c_0$, $(c_0 = \sup_K \varphi)$ allora $H_r(X \bmod B_c, \mathbf{Z}) = 0$ per $r > n + q - 1$, e privo di torsione per $r = n + q - 1$; se inoltre la frontiera di B_c è differenziabile $H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è libero.

Questo teorema generalizza in parte un teorema di A. Andreotti ed R. Narasimhan [3] relativo alle coppie di Runge perchè, nel caso $q = 1$, la coppia (X, B_c) è una coppia di Runge.

Daremo poi (n. 3) un corollario relativo alle varietà q-complete che generalizza un teorema di A. Andreotti e T. Frankel [2] al quale si riduce se X è una varietà di Stein.

2. — Omologia relativa delle varietà q-pseudoconvesse ($q > 0$).

Sia X una varietà complessa di dimensione complessa n; siano $z^\alpha = x^\alpha + ix^{n+\alpha}$, $(\alpha = 1, \dots, n)$ coordinate complesse locali nell'intorno del punto $P \in X$. Faremo uso del seguente:

LEMMA. *Sia $\psi : X \longrightarrow \mathbf{R}$, una funzione differenziabile su un aperto $U \subset \mathbf{C}^n$ e supponiamo che nel punto $P \in X$ la forma hermitiana $\partial \bar{\partial} \psi = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right)_P u^\alpha \bar{u}^\beta$ abbia $\nu(\psi)$ valori propri positivi.*

Posto $u^\alpha = t^\alpha + it^{n+\alpha}$, sia $i(\psi)$ il numero dei valori propri negativi della forma quadratica $\sum_{i,j=1}^{2n} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}\right)_P t^i t^j$. Allora:

$$\nu(\psi) + i(\psi) \leq 2n.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè ψ è una funzione reale risulta:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} t^i t^j = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta + 2Re\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} u^\alpha u^\beta\right). \tag{1}$$

Sia ad esempio $u^{\nu(\psi)+1} = \dots = u^n = 0$ uno spazio lineare sul quale la forma $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} u^\alpha \bar{u}^\beta$ è definita positiva. Ivi la forma $2Re\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} u^\alpha u^\beta\right)$ ha tanti valori propri positivi quanti negativi comé parte reale di una forma quadratica nelle variabili complesse.

Ne segue che esiste uno spazio reale a $\nu(\psi)$ dimensioni sul quale il secondo membro della (1) è positivo. Quindi la forma quadratica $\sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} t^i t^j$ ha almeno $\nu(\psi)$ valori propri positivi e perciò $\nu(\psi) + i(\psi) \leq 2n$.

Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA. *Sia X una varietà q-pseudoconvessa, relativamente ad una funzione φ fortemente q-plurisubarmonica su $X - K$ ($K \subset X$, compatto). Sia $c_0 = \sup_K \varphi$; per $c > c_0$ si ha:*

$$H_i(X \bmod B_c, \mathbf{Z}) = 0 \qquad \text{per} \quad i > n + q - 1, \tag{2}$$

$$H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z}) \qquad \text{privo di torsione;} \tag{3}$$

se inoltre la frontiera di B_c è differenziabile (1) *allora $H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è libero.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col supporre che nell'insieme $\{P \in X \mid c \leq \leq \varphi(P) < +\infty\}$ vi siano solo punti critici non degeneri. Se P è uno di tali punti, il lemma precedente mostra che l'indice di P soddisfa alla disuguaglianza:

$$i(P) \leq n + q - 1. \tag{4}$$

Si consideri la filtrazione del complesso singolare $C_*(X)/C_*(B_c)$ mediante i complessi $C_*(B_l)/C_*(B_c)$, $(l > c)$; dalla successione spettrale di omologia relativa associata a tale filtrazione segue la disuguaglianza di Morse, $M_i \geq \dim H_i(X \bmod B_c, k)$, e quindi dalla (4):

$$H_i(X \bmod B_c, k) = 0 \qquad \text{per} \quad i > n + q - 1 \tag{5}$$

e per ogni corpo di coefficienti k.

Il teorema dei coefficienti universali:

$$H_i(X \bmod B_c, k) = H_i(X \bmod B_c, \mathbf{Z}) \otimes k + \mathrm{Tor}\,[H_{i-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z}), k]$$

e la (5) danno quindi la prova delle (2), (3).

Lasciamo ora cadere l'ipotesi che φ abbia solo punti critici non degeneri. È noto (2) che, per $c_0 < c < C$, si può determinare una funzione ψ_n, continua su X, C^∞ su $X - K$, avente solo punti critici non degeneri su $B = \overline{B_C - B_c}$, e tale che, scelto un sistema finito di carte, U_i, su un in-

(1) Questa ipotesi è soddisfatta per $c > c_0$ e generico, cioè al di fuori di un insieme avente misura di Lebesgue nulla. (Teorema di Sard).

(2) R. Thom [7] pag. 72. Teorema 4.

torno U di B, risulti:

$$\sup_B |\varphi - \psi_n| < \frac{1}{n}, \qquad \sup_i \sup_{U_i} \sum_{|r|\leq 2} |D_i^r \varphi - D_i^r \psi_n| < \frac{1}{n}.$$

Si può quindi scegliere ψ_n così prossima a φ che la forma hermitiana $\partial \bar\partial \psi_n$ abbia in ogni punto di B tanti valori propri positivi quanti ne ha la forma $\partial \bar\partial \varphi$.

Consideriamo gli insiemi:

$$B'_{c-\frac{1}{n}} = \left\{ P \in X \mid \psi_n(P) < c - \frac{1}{n} \right\}, \qquad B'_{C-\frac{1}{n}} = \left\{ P \in X \mid \psi_n(P) < C - \frac{1}{n} \right\}.$$

Si ha $B'_{c-\frac{1}{n}} \subset B_c$ e $B'_{C-\frac{1}{n}} \subset B_C$ e inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} B'_{c-\frac{1}{n}} = B_c, \qquad \lim_{n\to\infty} B'_{C-\frac{1}{n}} = B_C. \tag{6}$$

Per il risultato precedente si ha:

$$H_i(B'_{C-\frac{1}{n}} \bmod B'_{c-\frac{1}{n}}, k) = 0 \qquad \text{per} \quad i > n + q - 1;$$

le (6) danno poi:

$$\lim_{n\to\infty} H_i(B'_{C-\frac{1}{n}} \bmod B'_{c-\frac{1}{n}}, k) = H_i(B_C \bmod B_c, k) = 0, \tag{7}$$

per $i > n + q - 1$.

Considerando ora che,

$$\lim_{C\to\infty} H_i(B_C \bmod B_c, k) = H_i(X \bmod B_c, k),$$

si ottiene la (5) e quindi la prova delle (2), (3).

Per completare la dimostrazione del teorema resta da mostrare che se la frontiera di B_c è differenziabile allora $H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è libero. Osserviamo intanto che dalla (7) e dal teorema dei coefficienti universali:

$$H_{n+q}(B_C \bmod B_c, k) = H_{n+q}(B_C \bmod B_c, \mathbf{Z}) \otimes k +$$
$$+ \operatorname{Tor}[H_{n+q-1}(B_C \bmod B_c, \mathbf{Z}), k],$$

segue che $H_{n+q-1}(B_C \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è privo di torsione.

Supponiamo di nuovo che nell'insieme $\{P \in X \mid c \leq \varphi(P) < +\infty\}$ cadano solo punti critici non degeneri. Indichiamo con $c_i\,(c < c_1 < c_2 < \dots < c_i < \dots)$ una successione di valori di φ tali che $c_i \longrightarrow +\infty$ e B_{c_i} abbia frontiera differenziabile.

Dalle inclusioni $B_c \subset \overline{B}_c \subset B_{c_i}$ segue:

$$\dots \longrightarrow H_r(\overline{B}_c \bmod B_c, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_r(B_{c_i} \bmod \overline{B}_c, \mathbf{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{r-1}(\overline{B}_c \bmod B_c, \mathbf{Z}) \longrightarrow \dots,$$

ma, essendo la frontiera di B^c differenziabile, si ha $H_r(\overline{B}_c \bmod B_c, \mathbf{Z}) = 0$ per $r \geq 0$; risulta quindi $H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \approx H_r(B_{c_i} \bmod \overline{B}_c, \mathbf{Z})$.

Analogamente dalle inclusioni $\overline{B}_c \subset B_{c_i} \subset \overline{B}_{c_i}$ segue $H_r(B_{c_i} \bmod \overline{B}_c, \mathbf{Z}) \approx$ $\approx H_r(\overline{B}_{c_i} \bmod \overline{B}_c, \mathbf{Z})$ per cui si ha:

$$H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \approx H_r(\overline{B}_{c_i} \bmod \overline{B}_c, \mathbf{Z}) \tag{8}$$

per $r \geq 0$.

Poichè $\overline{B}_{c_i}$ e $\overline{B}_c$ sono compatti HLC i loro gruppi di omologia hanno un numero finito di generatori in ogni dimensione (³), allora $H_r(\overline{B}_{c_i} \bmod \overline{B}_c, \mathbf{Z})$, $(r \geq 0)$, ha un numero finito di generatori e così anche $H_r(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z})$ come segue da (8) (⁴).

In particolare $H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z})$, essendo privo di torsione è libero.

Tenuto conto della (7), dalle inclusioni $B_c \subset B_{c_{i-1}} \subset B_{c_i}$ segue poi:

$$0 \longrightarrow H_{n+q-1}(B_{c_{i-1}} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_{c_{i-1}}, \mathbf{Z});$$

quindi $H_{n+q-1}(B_{c_{i-1}} \bmod B_c, \mathbf{Z})$ è addendo diretto di $H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z})$.

Allora il

$$\lim_{i \to \infty} H_{n+q-1}(B_{c_i} \bmod B_c, \mathbf{Z}) = H_{n+q-1}(X \bmod B_c, \mathbf{Z})$$

è limite diretto di gruppi liberi ciascuno dei quali si immerge nel successivo come addendo diretto e quindi è libero.

(³) A. Borel [4] Exp. VII pag. 11.

(⁴) Se lo spazio X avesse delle singolarità contenute in K ma non fuori di K, in virtù del teorema di triangolabilità locale degli insiemi analitici di Koopman e Brown [6], il ragionamento precedente conserverebbe la sua validità. *Perciò il teorema rimane valido anche se X è uno spazio complesso privo di singolarità in $X - K$.*

3. — Omologia degli spazi q-completi ($q > 0$).

Se $K = \Phi$ il teorema precedente ha il seguente:

COROLLARIO. *Sia X una varietà q-completa relativamente ad una funzione differenziabile φ fortemente q-plurisubarmonica; si ha:*

$$H_i(X, \mathbf{Z}) = 0 \qquad \text{per} \quad i > n + q - 1,$$

$$H_{n+q-1}(X, \mathbf{Z}) \qquad \text{libero.}$$

La dimostrazione è ovvia.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI e H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* (in corso di stampa su Bull. de la Soc. Math. de France).

[2] A. ANDREOTTI e T. FRANKEL, *The Lefsehetz theorem on hyperplane sections.* Annals of Math. 69 (1959) pag. 713-717.

[3] A. ANDREOTTI e R. NARASIMHAN, *A topological property of Runge Pairs* (in corso di stampa su Annals of Math.)

[4] A. BOREL, *Cohomologie des espaces localment compacts d'après J. Leray.* E.T.H. (Zurich) (1951).

[5] H. GRAUERT, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds.* Annals of Math. 68 (1958) pag, 460-472.

[6] B. O. KOOPMAN e A. B. BROWN, *On the covering of analytic loci by complexes.* Trans. American Math. Society 34 (1931) pag. 231-251.

[7] R. THOM, *Les singularités des applications différentiables.* Annales de l'Inst. Fourier 6 (1955/56) pag. 43-87.