BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PISTOYE

Sur les sections planes des cônes circulaires obliques

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 117-119.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__117_1>

Sur les sections planes des cônes circulaires obliques; par M. de Pistoye.

(Séance du 19 février 1873)

Je me propose ici de démontrer d'une façon *élémentaire* que les sections planes d'un cône circulaire oblique sont de même nature que celles d'un cône droit, en partant des propriétés des cercles focaux.

Si, dans la démonstration du théorème de Dandelin, on remplace la sphère inscrite dans le cône et tangente au plan sécant par une sphère inscrite qui coupe le plan sécant, on établit aisément les propriétés des cercles focaux et en particulier celle-ci :

Toute section plane d'un cône droit peut être regardée comme le lieu des points tels que, pour chacun d'eux, le rapport de sa distance à une droite donnée avec la longueur de la tangente menée de ce même point à un cercle aussi donné soit constant.

Voici comment on peut établir la même propriété pour les sections planes des cônes circulaires obliques.

Soit S le sommet d'une cône circulaire oblique coupé par un plan X suivant la courbe AMA_1N; je cherche la ligne droite suivant laquelle l'un des plans cycliques coupe le plan X et je mène au cône un des plans tangents parallèles à cette droite, il coupera le plan X suivant une droite AL tangente en A au cône et parallèle à la précédente. Par la droite AL, je puis donc mener un plan qui soit parallèle au plan cyclique et qui par suite coupe le cône suivant un cercle. Je cherche de même la ligne droite suivant laquelle l'autre plan cyclique coupe le plan X et je mène les deux plans tangents au cône qui sont parallèles à cette droite; ils couperont le plan X suivant deux droites par chacune desquelles on peut mener un plan parallèle au plan cyclique, mais je ne construis que celui qui coupe le cône du même côté du plan X que le plan P. Le plan P_1 ainsi construit coupe le cône suivant un cercle, le plan X suivant une droite A_1L tangente en A_1 au cône, et le plan P suivant la ligne LTT′. Les cercles suivant lesquels les plans P et P_1 coupent le cône se rencontrent en T et T′, et par suite sont situés sur une même sphère 0000. Les lignes AL et A_1L sont tangentes à cette sphère, elles sont donc égales. La sphère coupe le plan X suivant un cercle $ACC'A_1C''$.

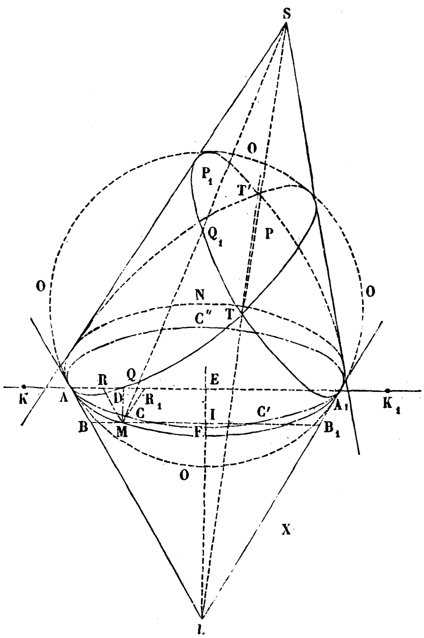

Fig. 2.

Soit M un point quelconque de l'intersection du cône avec le plan X; je mène la génératrice de ce point, elle coupera le plan P en Q et le plan P_1 en Q_1. Considérons d'abord le point Q; par le point M, je mène un plan parallèle au plan P, il coupera le plan X suivant une droite MR parallèle à la droite AL, et la droite AA_1 en R.

Par le sommet S, je mène un plan parallèle au plan P, il coupera la droite AA_1 en un certain point K (qui n'est qu'indiqué). La génératrice SM et la droite AA_1 sont coupées par trois plans parallèles; on a donc

$$\frac{MQ}{RA}=\frac{QS}{AK}$$

Je construis de même les points R_1 et K_1 en menant par les points M et S les plans parallèles au plan P_1; on a

$$\frac{MQ_1}{R_1A_1}=\frac{Q_1S}{A_1K_1},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1}=\frac{QS.Q_1S}{AK.A_1K_1}=\frac{ST^2}{AK.A_1K_1},$$

puisque la génératrice ST est tangente à la sphère.

Je mène par le point M une parallèle à la droite AA_1, elle coupe les lignes AL et A_1L aux points B et B_1, et la sphère aux points C et C′ situés sur le cercle $ACC'A_1C''$. J'abaisse du point L une perpendiculaire sur la corde AA_1, elle rencontre cette corde et sa parallèle BB_1 en E et en I ; le point I est le milieu de la corde CC' et de la longueur BB_1.

Les produits $MQ.MQ_1$ et $MC.MC'$ sont égaux, les longueurs RA et R_1A_1 sont respectivement égales aux longueurs MB et MB_1 ; on a donc

$$\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1}=\frac{MC.MC'}{MB.MB_1}=\frac{MI^2-IC^2}{IB^2-MI^2},$$

et, en égalant les deux valeurs du rapport $\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1}$,

$$\frac{MI^2-IC^2}{IB^2-MI^2}=\frac{ST^2}{AK.A_1K_1}.$$

En ajoutant les numérateurs aux dénominateurs, cette égalité devient

$$\frac{MI^2-IC^2}{IB^2-IC^2}=\frac{ST^2}{ST^2+AK.A_1K_1},$$

où MI^2-IC^2 est égal au produit $MC.MC'$, et aussi au carré de la longueur MF de la tangente menée du point M au cercle $ACC'A_1C''$. De même IB^2-IC^2 est égal à BA^2 ; on a donc

$$\frac{MF^2}{BA^2}=\frac{ST^2}{ST^2+AK.A_1K_1}.$$

J'abaisse du point M la perpendiculaire MD sur la corde AA_1 ; on a

$$\frac{BA}{MD}=\frac{LA}{LE},$$

et, en remplaçant BA par sa valeur dans l'équation précédente,

$$\frac{MF^2}{MD^2}=\frac{LA^2}{LE^2}\,\frac{ST^2}{ST^2+AK.A_1K_1}=\text{constante.}$$

Donc, etc.

Remarque. — Si les plans P et P_1 étaient menés de manière à couper le cône de côtés différents du plan X, la démonstration subsisterait dans ses parties principales, et on étendrait facilement les propriétés des cercles focaux aux cercles bitangents extérieurement.