BULLETIN DE LA S. M. F.

V. LIGUINE

Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 152-154.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__152_0>

Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes;
par M. V. Liguine.

(Séance du 16 avril 1873)

M. Jordan, dans une savante communication faite à la séance du 2 avril 1873, a énoncé un grand nombre de résultats très-intéressants sur les lieux géométriques de divers points singuliers d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, et a trouvé entre autres, pour le lieu des points dont les accélérations d'un ordre quelconque n sont constantes, une surface *générale* du second degré. On peut spécialiser la nature de cette surface dans le cas particulier de $n=1$, c'est-à-dire de l'accélération proprement dite ou du premier ordre, et faire voir que dans ce cas le lieu en question est un *ellipsoïde à trois axes inégaux* ayant pour centre le centre respectif des accélérations du premier ordre.

Cette remarque est une conséquence immédiate des formules données par M. Resal (*) pour les composantes de l'accélération du premier ordre suivant trois axes rectangulaires dans le mouvement le plus général d'un système invariable. Désignons, pour un instant donné t, par ω la vitesse angulaire du système mobile autour de l'axe instantané de rotation et de glissement, par v_g la vitesse de glissement, par U la vitesse orthogonale (*) du système, par θ la vitesse angulaire de l'axe instantané, par φ_1 l'accélération du premier ordre d'un certain point du système, et soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires dont l'origine se trouve dans le point d'intersection de l'axe instantané relatif au temps t avec la plus courte distance de cet axe et sa position infiniment voisine correspondant au temps $t+dt$, et dont les directions sont choisies de manière que l'axe des z soit dirigé suivant l'axe instantané et estimé positif dans le sens dans lequel doit être couché le long de cet axe un observateur ayant les pieds en o et voyant la rotation ω s'effectuer de sa gauche vers sa droite, et que l'axe positif des x soit dirigé suivant la vitesse orthogonale U dans le sens même de cette vitesse. Ces conventions faites, on a, comme l'a démontré M. Resal, pour les composantes $\varphi_{1,x}$, $\varphi_{1,y}$, $\varphi_{1,z}$ de l'accélération φ_1 d'un point M(x, y, z) du système mobile suivant les axes ox, oy, oz, les expressions (**)

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_{1,x} &= -\omega^2 x - \frac{d\omega}{dt} y + \omega\theta z,\\ \varphi_{1,y} &= \frac{d\omega}{dt} x - \omega^2 y + \omega U + v_g \theta,\\ \varphi_{1,z} &= -\omega\theta x + \frac{dv_g}{dt}. \end{aligned}\right.$$

(*) Voy. le mémoire de M. Resal *Sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide*, dans le 37e cahier du *Journ. de l'Éc. polytech.*

(**) *Loc. cit.;* voy. aussi la *Cinématique pure* du même auteur, p. 206, formule (5).

Transportons l'origine des axes ox, oy, oz, sans altérer leurs directions, dans le centre des accélérations du premier ordre relatif au temps t ou dans un point quelconque de l'axe des accélérations du même ordre, si cet axe existe; nommons x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux axes ox, oy, oz et par x', y', z' les coordonnées du point considéré M par rapport aux nouveaux axes. Retranchons respectivement les équations

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega^2 x_0 - \frac{d\omega}{dt} y_0 + \omega\theta z_0, \\ 0 &= \frac{d\omega}{dt} x_0 - \omega^2 y_0 + \omega U + v_g \theta, \\ 0 &= -\omega\theta x_0 + \frac{dv_g}{dt}, \end{aligned}$$

qui déterminent le point (x_0, y_0, z_0), des équations (1), et remplaçons ensuite dans les résultats les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ respectivement par x', y', z'; on trouve ainsi les expressions très-simples pour les composantes de φ_1 :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{1,x} &= -\omega^2 x' - \frac{d\omega}{dt} y' + \omega\theta z', \\ \varphi_{1,y} &= \frac{d\omega}{dt} x' - \omega^2 y', \\ \varphi_{1,z} &= -\omega\theta x'. \end{aligned} \right.$$

Ces composantes étant perpendiculaires entre elles, tous les points du système mobile ayant à un instant donné t des accélérations du premier ordre constantes $= p$ doivent satisfaire à la condition

$$\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{1,y}^2 + \varphi_{1,z}^2 = p^2.$$

En portant dans cette égalité les valeurs (2), on obtient, après quelques réductions, l'équation

$$(3) \quad \left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^2\theta^2\right] x'^2 + \left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] y'^2 + \omega^2\theta^2 z'^2 - 2\omega^3\theta x'z' - 2\omega \frac{d\omega}{dt} \theta y'z' = p^2,$$

et c'est cette relation entre x', y', z' qui exprime le lieu géométrique cherché. Or il est facile de s'assurer que l'équation (3) représente un ellipsoïde à troix axes inégaux dont le centre se trouve dans le point (x_0, y_0, z_0). On est donc conduit à ce théorème :

Dans le mouvement le plus général d'un système invariable, les lieux géométriques des points de ce système qui, à un instant considéré, ont des accélérations du premier ordre constantes, sont des ellipsoïdes à trois axes inégaux *dont le centre commun se trouve dans le centre respectif des accélérations du même ordre.*

Les expressions des axes de ces ellipsoïdes étant assez compliquées, il n'y a pas d'avantage à transformer l'équation (3) en rapportant la surface à ses diamètres principaux.

Dans le cas où il y a un point fixe dans le système, il faut poser $v_g = 0$, $U = 0$; mais, comme les quantités v_g, U se sont éliminées dans les expressions pour les composantes de φ_1 par le transport de l'origine des axes au centre des accélérations et ne figurent plus dans l'équation (3), on voit que *le théorème énoncé subsiste encore pour ce cas particulier.*

Enfin, dans le cas où le système se déplace parallèlement à un plan fixe, ou, ce qui revient au même, dans le cas du mouvement d'une figure plane dans son plan, il faut poser $v_g = 0$ et $\theta = 0$, et l'équation (3) devient

$$x'^2 + y'^2 = \frac{p^2}{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

ce qui montre que, dans ce cas particulier, les ellipsoïdes se transforment en cylindres concentriques à bases circulaires dont l'axe commun est l'axe des accélérations du premier ordre; en d'autres termes :

« Tous les points d'une figure plane qui glisse sur son plan possédant, à un instant considéré, la même accélération du premier ordre p, sont situés sur une circonférence décrite autour du centre respectif des accélérations avec un rayon égal au quotient qu'on obtient en divisant la quantité p par la valeur commune des accélérations premières des points de la figure qui sont situés à l'unité de distance du centre des accélérations. »

Cette propriété particulière des mouvements plans a été énoncée pour la première fois par M. Schell dans son excellent traité de mécanique intitulé : *Theorie der Bewegung und der Kraefte*, p. 383, et étendue par le même savant (*ibid.*, p. 484) au cas le plus général des accélérations d'un ordre quelconque. Sous cette dernière forme, la même propriété fut encore démontrée par une voie complétement différente par M. Somoff, membre de l'académie de Saint-Pétersbourg, dans sa *Cinématique*, p. 338, parue en russe en 1872, ouvrage plein des plus intéressantes recherches sur la mécanique géométrique et ses applications, et extrêmement remarquable par une méthode nouvelle et féconde de démonstration que le savant auteur y développe et qu'on pourrait nommer « méthode des opérations géométriques », car elle consiste dans une extension plus large des principes posés par MM. Bellavitis et de Saint-Venant sur la sommation, soustraction, multiplication et division de droites, considérées en même temps en grandeur et en direction.