BULLETIN DE LA S. M. F.

FLYE. SAINTE-MARIE

Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 82-83.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__82_0>

Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées;
par M. Flye Sainte-Marie.

(Séance du 22 janvier 1873)

Soit S une courbe gauche fermée quelconque; je suppose cette courbe parcourue dans un sens déterminé, et en chaque point m de la courbe je mène une tangente dirigée à partir de ce point dans le sens suivant lequel est parcouru sur la courbe l'élément contenant m. Par un point O quelconque de l'espace, je mène une série de droites parallèles à ces tangentes et dirigées dans le même sens. Les parallèles ainsi menées déterminent un cône dont le sommet est en O. Ce cône trace sur une sphère décrite du point O comme centre une courbe σ que je supposerai continue; ce qui revient à admettre que la courbe S ne présente ni point anguleux, ni point de rebroussement; la courbe gauche S étant fermée, la courbe sphérique σ l'est aussi, et l'on démontre aisément que tout grand cercle de la sphère est coupé par cette dernière au moins deux fois, soit en deux points distincts, soit suivant un point double de la courbe.

En recherchant quelles dispositions peut présenter la courbe σ pour satisfaire à cette condition, et en supposant que la courbe σ ne présente elle-même ni point anguleux ni point de rebroussement, on arrive aux conclusions suivantes :

1° Soit, sur la courbe σ, $2n$ le nombre des points d'inflexion (j'entends, par point d'inflexion sur une courbe sphérique, un point où la courbe est traversée par le grand cercle qui lui est tangent; le nombre de ces points est nécessairement pair); soit n' le nombre des points doubles et n'' le nombre des couples de points diamétralement opposés; la somme $n+n'$ est au moins égale à 2; si cette somme n'est pas plus grande que 2, n'' est au moins égal à 2; mais si $n+n'$ est égal à 3 ou plus grand que 3, n'' peut être nul.

2° La longueur totale de la courbe σ est toujours plus grande qu'une circonférence de grand cercle.

A ces propriétés de la courbe sphérique σ correspondent des propriétés analogues de la courbe gauche S :

1° Le nombre des points où la courbe S n'est pas traversée par son plan osculateur est toujours pair; soit $2n$ ce nombre. Si, la courbe S étant supposée parcourue dans un sens déterminé, n' désigne le nombre des couples d'éléments parallèles et parcourus dans le même sens, n'' le nombre des couples d'éléments parallèles et parcourus en sens contraire, la somme $n+n'$ est au moins égale à 2; si cette somme n'est pas plus grande que 2, n'' est au moins égal à 2; mais si $n+n'$ est égal à 3 ou plus grand que 3, n'' peut être nul.

Il est entendu, dans cet énoncé, que la courbe S ne présente ni point anguleux, ni point de rebroussement, et qu'il en est de même de la courbe image σ.

2° Si la courbe S ne présente ni point anguleux, ni point de rebroussement, la courbure totale de première espèce de la courbe entière est toujours plus grande que 2π.

A ces propositions, on peut ajouter la suivante :

Toute courbe sphérique σ, telle qu'aucun grand cercle de la sphère ne puisse la laisser entièrement d'un même côté, peut être considérée comme la courbe image d'une courbe gauche fermée.