BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHÉN

Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 69-72.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__69_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques; par M. Halphen.

(Séance du 11 février 1874)

Une des plus importantes propriétés que l'on rencontre, dès le début, dans l'étude des courbes algébriques planes, consiste en ce que toutes les courbes d'un degré donné sont des cas particuliers d'un même être géométrique, la courbe plane générale de ce degré. On conçoit donc immédiatement l'existence, pour toutes ces courbes, de propriétés communes et ne dépendant que d'une seule variable, le degré. C'est ainsi que le nombre des points d'inflexion, celui des sommets, celui des points de rencontre avec une ligne donnée, s'expriment par des fonctions du degré.

Pour les courbes gauches algébriques, il n'en est point de même. On ne connaît, en effet, aucun être géométrique qui comprenne, comme cas particuliers, toutes les courbes gauches d'un degré donné. On ne peut donc, pour aucune propriété des courbes gauches, si générale qu'elle soit, affirmer *a priori* qu'elle ne dépend que du degré. Il existe cependant de telles propriétés : c'est ainsi que le nombre des points de rencontre d'une courbe gauche avec une surface donnée ne dépend, quant à la courbe, que de son degré.

En avançant davantage dans l'étude des courbes gauches algébriques, on y a reconnu l'existence de plusieurs propriétés ne dépendant que de deux variables, le *degré* et le *nombre des points doubles apparents*. Mais il faut bien se garder de croire que toutes les courbes gauches, pour lesquelles ces deux nombres ont des valeurs données, soient des cas particuliers d'une seule et même courbe générale satisfaisant à cette même condition. Ce fait est, il est vrai, exact pour les degrés les plus simples. Mais dès qu'on envisage les courbes de degré un peu élevé, on en reconnaît facilement l'inexactitude, ainsi qu'on s'en convaincra par l'exemple suivant, choisi parmi les plus simples.

L'intersection complète de deux surfaces du troisième degré est une ligne du neuvième degré ayant, d'après une formule bien connue, 18 points doubles apparents. On reconnaît aisément que cette ligne est déterminée par 18 de ses points, c'est-à-dire qu'elle renferme 36 arbitraires. Désignons-la par la lettre C.

Considérons, d'autre part, la ligne C′, tracée sur un hyperboloïde et rencontrant les génératrices rectilignes de la surface respectivement en 6 et en 3 points. Cette ligne, qui est aussi du 9^{me} degré, possède aussi 18 points doubles apparents. D'après les formules bien connues qu'a données M. Chasles, elle renferme 27 arbitraires, l'hyperboloïde étant donné. Par suite, cette surface n'étant pas donnée, la ligne C' renferme $27+9=36$ arbitraires.

Si l'on demande les courbes du 9^{me} degré, sans singularités, et ayant 18 points doubles apparents, on obtient donc, par les courbes C et C', deux solutions du problème. Ces solutions sont d'ailleurs les seules; elles diffèrent entre elles et ont le même degré de généralité, puisqu'elles renferment le même nombre d'arbitraires. Ces deux courbes ont en commun toutes les propriétés ne dépendant que de ces deux nombres, le degré et le nombre des points doubles apparents. Mais elles diffèrent à l'égard des autres. Elles diffèrent au point de vue du degré minimum des surfaces qui les contiennent. Elles diffèrent encore au point de vue du degré minimum des surfaces monoïdes qui y passent : pour la courbe C, ce degré est 5; pour la courbe C', ce degré est égal à 6.

Il serait d'un très-grand intérêt de connaître le caractère général des propriétés des courbes qui ne dépendent que du degré et du nombre des points doubles apparents. La déterminaiton des formules relatives à ces propriétés en serait généralement rendue très-facile par le moyen des équations fonctionnelles.

Qu'il s'agisse, par exemple, de déterminer le degré de la surface engendrée par les droites qui rencontrent en trois points différents une courbe gauche algébrique. En admettant que ce degré ne dépende que de celui de la courbe et du nombre de ses points doubles apparents, on le détermine avec la plus grande facilité au moyen des équations fonctionnelles (Voyez Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, t. II, p. 528; Leipzig, 1865). Mais l'hypothèse n'étant nullement justifiée *a priori*, la démonstration n'a aucune valeur. Elle serait au contraire entièrement rigoureuse, et la plus rapide de toutes, si l'on possédait le moyen de reconnaître *a priori* que l'hypothèse est exacte.

Le degré de la surface dont il s'agit, ainsi que les formules relatives à beaucoup d'autres propriétés des courbes, ne dépendant que de leur degré et du nombre de leurs points doubles apparents, a été déterminé en toute rigueur par M. Zeuthen (*Annali di mat.*, ser. II, t. III). Je me propose de donner ici quelques autres formules, qui sont dans le même cas, et qui ne me paraissent pas avoir été publiées jusqu'à présent.

Je m'appuierai sur les deux lemmes suivants, dont la démonstration est si facile que je crois pouvoir me dispenser de la donner.

Lemme I. — *Par chaque point d'une courbe gauche algébrique passent deux séries de plans, relatifs à ce point. Soient m et m_1 les nombres respectifs de ces plans relatifs à un même point, et c et c_1 les classes respectives de leurs enveloppes. Soit enfin x le nombre des couples de plans des deux séries, rela-*

tifs à un même point, et qui coïncident. Les intersections des plans ae l'une et l'autre série, relatifs à un même point, forment une surface de degré $mc_1 + m_1 c - x$.

Lemme II. — *Sur une surface réglée de degré* p, *considérons une courbe* Q, *de degré* q, *qui soit rencontrée en* t *points par les génératrices rectilignes de la surface, et par chaque point de laquelle passent* χ *génératrices. Soit de plus* i *le nombre des génératrices de la surface situées à l'infini. Par chaque point de* Q, *on mène les plans perpendiculaires aux génératrices qui y passent : la classe de l'enveloppe de ces plans est* $pt + q\chi - it(\chi + 1)$.

Appliquons le lemme II à une courbe Q, sans singularité, de degré q et de classe r, et à la surface développable dont elle est l'arête de rebroussement. Nous avons ici

$$t = 1,\ p = x,\ \chi = 1,\ i = 0.$$

Nous trouvons alors que la classe de l'enveloppe des plans normaux à Q est $q + r$, ce qui est bien connu.

Appliquons le lemme I à la même courbe, en considérant les deux séries des plans normaux et osculateurs. La classe de l'enveloppe de ces derniers est, comme on sait, égale à $3(r - q)$. D'ailleurs, il n'existe aucun point de la courbe où le plan normal et le plan osculateur coïncident. Donc on a

$$c = r + q,\ \ c_1 = 3(r - q), m = m_1 = 1,\ \ x = 0.$$

Par suite, le degré de la surface des normales principales est

$$c + c_1 = 4r - 2q.$$

Appliquons le lemme II à la courbe Q et à la surface de ses normales principales. Remarquons que la normale principale relative à un point à l'infini est, en général, à l'infini. Nous avons ici

$$t = 1,\ p = 4r - 2q,\ \chi = 1,\ i = q.$$

Nous trouvons ainsi la classe de l'enveloppe des plans rectifiants de Q, qui est égale à $4r - 3q$.

Ce dernier résultat s'obtient encore au moyen du lemme I. Considérons, en effet, les deux séries des plans osculateurs et rectifiants. On aura ici $c = 3(r - q)$, et c_1 sera inconnu. Mais on sait que le degré de la surtace formée par leurs intersections, qui est la développable dont Q est l'arête de rebroussement, est égal à r. D'ailleurs le nombre x des points de Q où les deux plans coïncident est facile à déterminer. C'est, en effet, le nombre des plans osculateurs *isotropes*. Il resterait à montrer que chacun de ces plans ne figure que pour une unité dans le nombre x. Je ne m'arrêterai pas sur ce point, facile à élucider, et j'écrirai donc

$$x = 6(r - q),\ \ c_1 + 3(r - q) = r + 6(r - q).$$

D'où

$$c_1 = 4r - 3q.$$

On obtiendra aussi de deux manières le degré de la surface engendrée par les binormales de Q :

1° Par le lemme I, en considérant les deux séries des plans normaux et rectifiants. Ils coïncident quand la tangente est *isotrope*; c'est-à-dire $2r$ fois. Le degré cherché est donc

$$(4r - 3q) + (q + r) - 2r = 3r - 2q.$$

2° Par le lemme II, en remarquant que q binormales sont à l'infini, et que, par suite, le degré cherché, diminué de q, reproduit la classe de l'enveloppe du plan osculateur. Donc cette classe $3(r - q)$, augmentée de q, est le degré cherché : $3r - 2q$.

Nous résumons ces résultats de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Pour une courbe gauche de degré q et de classe r, sans singularité,*

1° *L'enveloppe des plans rectifiants est de la classe $4r - 3q$,*

2° *La surface des normales principales est de degré $4r - 2q$.*

3° *La surface des binormales est de degré $3r - 2q$* (*).

J'ajoute encore que l'on peut aisément déterminer :

Le nombre des normales principales qui rencontrent de nouveau la courbe, et qui est égal à $(q-1)(4q-2r)-3r$;

Le nombre des binormales qui rencontrent de nouveau la courbe, et qui est égal à $(q-1)(3r-2q)-r$;

Le nombre des droites à distance finie qui sont normales à la courbe en deux points différents, et qui est égal à $\dfrac{(q+r)(q+r'-1)}{2} - 2r$.

Ce dernier résultat s'applique également aux courbes planes; on doit alors faire $r = q(q-1)$.