

# BULLETIN DE LA S. M. F.

H. DE LA GOUPILLIÈRE

## **Note sur la théorie des développés**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 5 (1877), p. 126-128.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1877\\_\\_5\\_\\_126\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__126_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

*Note sur la théorie des développoides;*

par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Séance du 10 janvier 1877.)

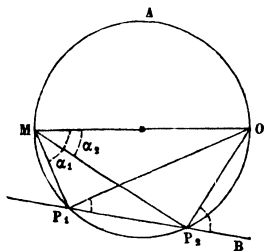
Je me propose d'appeler ici l'attention sur une propriété fort remarquable et déjà connue des développoides (<sup>1</sup>), qui peut s'énoncer de la manière suivante : « Si l'on prend la développoides  $C_1$  d'une courbe arbitraire  $C$  sous un angle  $\alpha_1$ , puis la développoides  $C_{1,2}$  de celle-ci sous l'angle  $\alpha_2$ , ou si, au contraire, on construit d'abord la développoides  $C_2$  de la proposée  $C$  pour l'angle  $\alpha_2$ , et ensuite la développoides  $C_{2,1}$  de celle-ci sous l'angle  $\alpha_1$ , quelque différentes que soient entre elles les lignes intermédiaires  $C_1$  et  $C_2$ , les deux courbes  $C_{1,2}$  et  $C_{2,1}$  ainsi obtenues finalement coïncident entre elles. »

Ce théorème n'a été établi jusqu'ici que par l'emploi des coordonnées *naturelles*, c'est-à-dire en représentant les courbes par une équation entre leur rayon de courbure et leur angle de contingence. D'une part ces considérations se rattachent à une partie des Mathématiques plus élevée que la Géométrie élémentaire sur laquelle est uniquement fondée la démonstration que je propose plus loin. Celle-ci aura donc l'avantage de faire pénétrer plus facilement dans l'enseignement ordinaire cette intéressante proposition. Mais de plus on doit, je pense, considérer la démonstration ordinaire comme tout à fait insuffisante, ou du moins comme n'établissant qu'une partie seulement de l'énoncé, tel que je l'ai formulé. En effet, en obtenant pour les deux courbes  $C_{1,2}$  et  $C_{2,1}$  la même équation entre le rayon de courbure et l'angle de contingence, on prouve seulement qu'elles sont *superposables* et non qu'elles sont *superposées*, ou ne forment qu'une seule et même ligne. C'est à la fois un avantage des coordonnées naturelles dans certaines questions et un défaut dans d'autres occasions telles que celle-ci de fournir la *forme* sans avoir égard à la *situation* des lieux géométriques. Et lors

---

(<sup>1</sup>) On appelle ainsi l'enveloppe des droites qui font un angle constant avec une courbe quelconque en chacun de ses points.

même que dans un problème les diverses équations obtenues seraient par la nature des choses rattachées à un même axe de comparaison, il resterait encore une incertitude complète sur la situation, car une translation arbitraire des diverses courbes de la question parallèlement à elles-mêmes et indépendamment les unes des autres ne modifierait en rien les angles qui servent à caractériser leurs divers points, pour en déduire par leurs équations respectives leur courbure en ces points. Il ne me serait pas difficile de produire des exemples de recherches dans lesquelles on obtient la même équation pour représenter dans une même question des courbes parfaitement distinctes. Je pense donc que sous ce rapport l'ancienne démonstration doit être considérée comme insuffisante, et



qu'un procédé géométrique direct, outre l'avantage de la simplicité, ajoutera à la portée de l'ancien théorème.

Supposons que M désigne le point décrivant de la courbe C qu'il est inutile de tracer, et MO son rayon de courbure (*voir la fig.*), par suite O le centre du cercle osculateur. On sait, d'après le théorème de Réaumur, que le point où l'oblique mobile touche sa développée s'obtient en y projetant orthogonalement le centre de courbure <sup>(1)</sup>. Si donc nous menons les deux obliques MP<sub>1</sub> et MP<sub>2</sub> faisant respectivement avec la normale MO les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , les points P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub>

---

<sup>(1)</sup> Réaumur a établi cette propriété dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1709. M. Habich en a donné depuis une démonstration immédiate en remarquant que le mode de description de la courbe C revient au roulement sur la développée de la normale qui fait l'angle invariable  $\alpha$  avec l'oblique qui enveloppe la développée. Le centre instantané de ce mouvement se trouve donc au centre de courbure, et sa projection sur la droite mobile fournit le point où elle touche son enveloppe.

des développoides  $C_1$  et  $C_2$  seront fournis par l'intersection de ces droites avec le cercle décrit sur  $MO$  comme diamètre. Or je dis que, si l'on joint  $P_1P_2$ , cette ligne sera à la fois tangente aux deux développoides du second ordre  $C_{1,2}$  et  $C_{2,1}$ . En effet, d'une part, elle passe par les points décrivant des premières développoides, à savoir  $P_1$  de  $C_1$  et  $P_2$  de  $C_2$ . Il suffit donc de prouver qu'elle fait en  $P_1$  l'angle  $\alpha_2$  avec la normale de  $C_1$  et en  $P_2$  l'angle  $\alpha_1$  avec la normale de  $C_2$ . Ces normales sont d'ailleurs  $P_1O$  et  $P_2O$ , puisque les tangentes des mêmes courbes sont  $P_1M$  et  $P_2M$ . Or on voit en premier lieu que l'angle  $P_2P_1O$  est inscrit sur le même arc  $OP_2$  que  $P_2MO$  ou  $\alpha_2$ . En second lieu on a pour l'angle  $BP_2O$

$$BP_2O = 180^\circ - P_1P_2O = \frac{360^\circ - \text{arc } P_1AO}{2} = \frac{\text{arc } P_1P_2O}{2} = P_1MO = \alpha_1.$$

Il est donc établi que  $P_1P_2$  touche à la fois les deux lignes  $C_{1,2}$  et  $C_{2,1}$ . Mais la série de ces droites  $P_1P_2$ , dont chacune correspond à un point  $M$  de la proposée  $C$ , ne peut avoir qu'une seule enveloppe, et, par conséquent, cette enveloppe fournit à la fois les deux développoides du second ordre  $C_{1,2}$  et  $C_{2,1}$ , ainsi qu'il fallait le démontrer.

---