

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

**Sur les surfaces dont les rayons de courbure
principaux sont fonctions l'un de l'autre**

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 163-166.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__163_1

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre; par M. A. MANNHEIM.

(Séance du 25 juillet 1877.)

Dans une Communication que j'ai faite récemment sur ce sujet à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, je n'ai pu, faute de place, donner une démonstration géométrique d'un théorème établi analytiquement par M. Halphen ⁽²⁾. Voici cette démonstration :

Soient a un point d'une surface (S_R) , dont les rayons de courbure principaux sont liés entre eux, A la normale en ce point et b et c les centres de courbure situés sur cette normale. Appelons (B) et (C) les nappes de la développée de (S_R) et B et C les normales à ces surfaces issues des points b et c . Prenons pour plan de la figure le plan de la section principale de (S_R) en a pour laquelle le rayon de courbure ac ou R_1 est maximum. L'une des lignes de courbure

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 avril 1877.

⁽²⁾ Voir ce *Bulletin* pour 1876.

de (S_R) est tangente en a à ce plan. La normale à (S_R) , qui a pour directrice cette courbe, est une surface développable dont l'arête de rebroussement est tangente en c à A . Cette surface développable est circonscrite à (B) le long d'une courbe dont la tangente en b est l'axe de courbure de l'autre ligne de courbure qui passe en a . Cet axe, comme je l'ai montré ⁽¹⁾, rencontre C en i , qui est le centre de courbure pour le point c de la courbe de contour apparent de (C) , projetée orthogonalement sur le plan mené en c perpendiculairement à A .

Lorsque a se déplace sur la ligne de courbure tangente au plan de la figure, la normale A se déplace sur ce plan d'un angle $d\psi$ et le rayon de courbure ac ou R_1 varie.

On a, en appelant ε le centre de courbure de la section faite dans (C) par le plan de la figure,

$$dR_1 = c\varepsilon d\psi.$$

Le rayon de courbure ab ou R_2 varie en même temps; en menant bj perpendiculairement à la tangente bi , on a

$$dR_2 = cj d\psi;$$

on a alors

$$\frac{dR_1}{dR_2} = \frac{c\varepsilon}{cj}.$$

Mais $cj = -\frac{bc^2}{ci}$ (en mettant le signe — parce que les segments ci et cj sont nécessairement de part et d'autre du point c); il vient

$$\frac{dR_1}{dR_2} = -\frac{c\varepsilon \times ci}{bc^2},$$

et comme le produit $c\varepsilon \times ci$ est égal au produit $t_1 t_2$ des rayons de courbure principaux de (C) en c , on arrive à

$$(1) \quad \frac{dR_1}{dR_2} = -\frac{t_1 t_2}{(R_1 - R_2)^2}.$$

Déplaçons maintenant la normale A en faisant suivre au point a un élément de la ligne de courbure perpendiculaire au plan de la

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 7 décembre 1874.

figure et de façon que la variation de ab soit dR_2 . Alors, puisque R_1 et R_2 sont liés entre eux, l'autre rayon de courbure variera de dR_1 , et l'on trouvera comme précédemment

$$(2) \quad \frac{dR_2}{dR_1} = - \frac{r_1 r_2}{(R_1 - R_2)^2}.$$

En faisant le produit de ces deux égalités, il vient

$$r_1 r_2 t_1 t_2 = (R_1 - R_2)^4.$$

De là le théorème qu'il s'agissait d'établir :

Pour une surface (S_R), le produit des rayons de courbure principaux des nappes (B) et (C) aux points b et c est égal à $(R_1 - R_2)^4$.

Des relations (1) et (2) nous pouvons déduire quelques conséquences. Si, par exemple, on considère les surfaces pour lesquelles $R_1 - R_2 = \text{const.}$, on a

$$dR_1 = dR_2,$$

et par suite

$$r_1 r_2 = t_1 t_2 = - (R_1 - R_2)^2.$$

On peut donc dire :

Lorsque $R_1 - R_2 = \text{const.}$, les nappes (B) et (C) sont à courbures opposées; le produit des rayons de courbure principaux de (B) est égal au produit des rayons de courbure principaux de (C) et égal à $-(R_1 - R_2)^2$.

De la même manière, on trouvera que :

Lorsque $\frac{R_1}{R_2} = \text{const.}$, le produit des rayons de courbure principaux de (B) en b est proportionnel au produit analogue pour (C) et au produit analogue pour (S_R) en a .

A ces théorèmes j'ajouterai les suivants, qui résultent facilement des théorèmes démontrés dans la Note à l'Académie dont je viens de parler :

Lorsque $R_1 - R_2 = \text{const.}$, les normales qui touchent (B) et (C) suivant des asymptotiques ont pour plans centraux les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans des sections principales. Ces

normalies ont pour lignes de striction des courbes lieux des points milieux des segments tels que bc , et leur paramètre de distribution est constant et égal à $\frac{R_1 - R_2}{2}$. Les asymptotiques des nappes (B) et (C) ont même rayon de seconde courbure.

Lorsqu'une surface convexe (S_R) a ses indicatrices semblables entre elles, les normalies qui touchent (B) et (C) suivant des asymptotiques ont pour directrices des courbes qui coupent sous le même angle les lignes de courbure d'un même système de (S_R). Les lignes de striction de ces normalies partagent dans un rapport constant les segments tels que bc .
