

BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Sur les substitution linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 69-70.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__69_1

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les substitutions linéaires; par M. DE POLIGNAC.

(Séance du 24 janvier 1877.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution linéaire

$$x' = \frac{bx + d}{ax + c},$$

répétée μ fois, ramène à la valeur initiale, est, d'après M. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*),

$$\frac{(b+c)^2}{bc-ad} = 4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}.$$

On peut obtenir ce résultat presque immédiatement par les considérations suivantes.

En portant sur une ligne droite les longueurs $x, x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}, x_\mu = x$, on obtient une série cyclique de points tels, que le rapport anharmonique de quatre points consécutifs est constant. On trouve sans difficulté

$$\frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{13} \cdot \overline{24}} = \frac{bc-ad}{(b+c)^2}.$$

D'ailleurs, d'après un théorème de M. Chasles, si les points doubles de la relation homographique

$$axx' - bx + cx' - d = 0,$$

qui lie deux points homologues (i, e consécutifs), sont imaginaires, il existe un point du plan duquel ces deux points homologues sont vus sous un angle constant. Si la série forme un cycle de μ points, cet angle sera donc égal à $\frac{\lambda\pi}{\mu}$; car les rayons vecteurs menés du point en question aux μ points de la série partageront la circonférence ou la demi-circonférence en μ parties égales. Enfin on a, dans ce cas,

$$\frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{13} \cdot \overline{24}} = \frac{\sin \theta \sin \theta}{\sin 2\theta \sin 2\theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 2\theta} = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}}$$

ou

$$\frac{(b+c)^2}{bc-ad} = 4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}.$$
