

BULLETIN DE LA S. M. F.

LAISANT

Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 193-194.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__193_1

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. LAISANT.

(Séance du 31 juillet 1878.)

Dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1783, Lagrange a donné sous ce titre : *Sur une propriété nouvelle du centre de gravité*, une Note qui a été réimprimée dans les *Œuvres complètes*, t. V, p. 535.

L'objet essentiel de cette Note consiste dans la démonstration des deux théorèmes suivants, dont je reproduis textuellement les énoncés :

THÉORÈME I. — *Soit un système ou assemblage quelconque de plusieurs corps ou masses dont chacune soit considérée comme un point, qu'on multiplie toutes ces masses deux à deux, et ensuite chaque produit de deux masses par le carré de la distance entre elles; qu'enfin on divise la somme de ces différents produits par la somme de toutes les masses; on aura une quantité égale à la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance au centre de gravité du système.*

THÉORÈME II. — *La somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à un point quelconque donné est égale au produit de la somme des masses par le carré de la distance de ce point au centre de gravité de toutes ces masses, plus à la somme des produits des masses multipliées deux à deux entre elles, et par le carré de leurs distances respectives, cette dernière somme étant divisée par la somme même des masses.*

Sans être difficile, l'analyse de Lagrange présente encore des calculs assez développés. On peut arriver plus rapidement, par la

méthode des quaternions, à établir la proposition qui fait l'objet du théorème II.

Soient O l'origine que nous prenons au point quelconque d'où l'on compte les distances; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots$ les vecteurs des divers points dont les masses sont respectivement m_1, m_2, \dots ; enfin \mathbf{G} le vecteur du centre de gravité.

Le théorème II s'exprime évidemment par l'équation

$$(a) \quad \Sigma m_{\mathbf{A}^2} = \Sigma m \cdot \mathbf{G}^2 + \frac{\Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_q)^2}{\Sigma m}.$$

Or nous avons

$$\frac{\Sigma m_{\mathbf{A}}}{\Sigma m} = \mathbf{G},$$

$$\Sigma m_{\mathbf{A}} = \Sigma m \cdot \mathbf{G},$$

et, en élevant au carré,

$$\Sigma m^2 \mathbf{A}^2 + 2 \Sigma m_p m_q \mathfrak{S}_{\mathbf{A}_p \mathbf{A}_q} = (\Sigma m)^2 \mathbf{G}^2,$$

p et q représentant ici deux indices quelconques, différents l'un de l'autre.

De là

$$\Sigma m^2 \mathbf{A}^2 = (\Sigma m)^2 \mathbf{G}^2 - 2 \Sigma m_p m_q \mathfrak{S}_{\mathbf{A}_p \mathbf{A}_q}.$$

Si nous ajoutons maintenant de part et d'autre la quantité

$$\Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p^2 + \mathbf{A}_q^2),$$

il est visible que nous aurons

$$\Sigma m \cdot \Sigma m_{\mathbf{A}^2} = (\Sigma m)^2 \mathbf{G}^2 + \Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_q)^2,$$

c'est-à-dire, en divisant par Σm , l'équation (a) en démonstration.

Quant au théorème I, c'est un corollaire immédiat de celui-ci; car, si nous supposons que nous prenions le centre de gravité pour origine, le premier terme du second membre de l'équation (a) disparaît, et il reste

$$(b) \quad \Sigma m_{\mathbf{A}^2} = \frac{\Sigma m_p m_q (\mathbf{A}_p - \mathbf{A}_q)^2}{\Sigma m},$$

relation qui exprime le théorème I.