

BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SONINE

Note sur une formule de Gauss

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 162-166.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__162_1

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Note sur une formule de Gauss; par M. N. SONINE.

(Séance du 15 juillet 1881.)

La propriété fondamentale et la plus simple de la fonction $\Gamma(x)$, définie pour des valeurs à partie réelle positive de la variable x par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

consiste dans l'équation aux différences finies

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

On en tire aisément le théorème célèbre de Gauss.

En effet, en désignant par n un nombre entier positif, on aura

$$\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{n} + 1\right) = \frac{x}{n} \Gamma\left(\frac{x}{n}\right),$$

et, si l'on élimine x entre ces deux équations, on obtient

$$(1) \quad \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = n \frac{\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}.$$

Mais le rapport de l'expression $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ se réduit aisément au produit des rapports dans lesquels les valeurs de la variable ne diffèrent que de l'unité, à savoir

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x+n-1)} \frac{\Gamma(x+n-1)}{\Gamma(x+n-2)} \dots \frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}.$$

Cette transformation, appliquée au second membre de l'équa-

tion (1), conduit au résultat suivant

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} \\ = n \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma(x+1)},$$

ou, en posant

$$(2) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} = \varphi_n(x), \\ \varphi_n(x) = n\varphi_n(x+1).$$

Cette dernière équation admet pour solution particulière $\varphi_n(x) = A^x$ ou $A = \frac{1}{n}$, et la solution générale sera

$$\varphi_n(x) = n^{-x}\theta_n(x),$$

$\theta_n(x)$ étant une fonction périodique telle que $\theta_n(x) = \theta_n(x+1)$.
D'après cela, l'équation (2) devient

$$(3) \quad \theta_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} n^x.$$

Remplaçons-y n par le produit mn de deux nombres entiers, ce qui fournit

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{mn}(x) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+m}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma(x)} n^x n^x, \end{array} \right.$$

et composons le produit

$$\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{m}\right)} n^{x+\frac{m-1}{2}},$$

dans lequel le numérateur du second membre est égal à

$$0_{mn}(x)\Gamma(x)m^{-x}n^{-x},$$

en vertu de l'équation (4), tandis que le dénominateur s'exprime par

$$0_m(x)\Gamma(x)m^{-x},$$

en vertu de l'équation (3). En substituant ces valeurs, on aura

$$0_m(x)\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right) = 0_{mn}(x)n^{\frac{m-1}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{0_m(x)}{\sqrt{m}} \frac{0_n\left(\frac{x}{m}\right)}{\sqrt{n}} \frac{0_n\left(\frac{x+1}{m}\right)}{\sqrt{n}} \dots \frac{0_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{\sqrt{n}} = \frac{0_{mn}(x)}{\sqrt{mn}},$$

et si l'on désigne $\frac{0_n(x)}{\sqrt{n}}$ par $\sigma_n(x)$, on trouve définitivement

$$(5) \quad \sigma_m(x) = \frac{\sigma_{mn}(x)}{\sigma_n\left(\frac{x}{m}\right)\sigma_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\sigma_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)},$$

où naturellement $\sigma_n(x) = \sigma_n(x+1)$. Pour $n = \infty$, la fonction $\sigma_n(x)$ ne pourra dépendre que de x , et, en posant $\lim \sigma_n(x) = \frac{1}{f(x)}$, l'équation (5) fournira, pour $n = \infty$,

$$(6) \quad \sigma_m(x) = \frac{f\left(\frac{x}{m}\right)f\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{f(x)},$$

où $f(x) = f(x+1)$. On s'assure aisément que cette expression de $\sigma_m(x)$ satisfait identiquement à l'équation (5), pour chaque valeur de m et de n . C'est donc l'expression la plus générale de la fonction $\sigma_m(x)$.

D'après cela, l'équation (3) pourra prendre la forme

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) \\ & = n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Mais le premier membre ne devient assurément infini pour aucune valeur de x , à partie réelle positive et finie; quant au second membre, le facteur $n^{\frac{1}{2}-x} \Gamma(x)$ possède la même propriété; donc, ou le second facteur

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right) f\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)},$$

qui est une fonction périodique, ne doit pas non plus devenir infini; et par conséquent ne sera qu'une constante a_n , indépendante de x ; ou les infinis de ce facteur doivent coïncider tous avec les zéros de $\Gamma(x)$, de sorte que le produit de ce facteur par $\Gamma(x)$ reste toujours fini: mais alors les infinis dont il s'agit, et la manière dont se comporte la fonction périodique dans ces infinis, seraient indépendants de n ; ce qui est évidemment inadmissible. On doit donc admettre définitivement

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right) f\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)} = a_n.$$

On tire de là, en remplaçant x successivement par $\frac{x}{m}, \frac{x+1}{m}, \dots, \frac{x+m-1}{m}$ et faisant la multiplication des résultats,

$$\frac{f\left(\frac{x}{mn}\right) f\left(\frac{x+1}{mn}\right) \dots f\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{f\left(\frac{x}{m}\right) f\left(\frac{x+1}{m}\right) \dots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)} = a_n^m,$$

où le premier membre est évidemment égal à $\frac{a_{mn}}{a_m}$. Donc, en échangeant entre elles les lettres m, n , on trouve

$$a_{mn} = a_m a_n^m = a_n a_m^n,$$

et on en conclut aisément

$$n^{-1} \sqrt[n]{a_n} = m^{-1} \sqrt[m]{a_m} = \text{constante absolue } \alpha,$$

c'est-à-dire $a_n = \alpha^{n-1}$. La formule (1), devenue maintenant

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-x} \Gamma(x) \alpha^{n-1},$$

permet de déterminer a par les valeurs $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$: il suffit d'admettre $x = 1$, $n = 2$, et on trouve

$$a = \sqrt{2\pi}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

A notre connaissance, on n'a pas encore cherché le terme complémentaire dans le produit qui représente $\Gamma(x)$. En nous bornant au cas de la variable réelle, nous avons trouvé, au moyen d'une méthode générale, le résultat suivant

$$\Gamma(x+1) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} (n+1)^x \\ \times \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{x+n}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{x+cn}} \left[\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x} \right]^{\theta}.$$

où $0 < \theta < 1$.