

# BULLETIN DE LA S. M. F.

C. LE PAIGE

## Sur la règle de multiplication des déterminants

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 9 (1881), p. 67-69.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1881\\_\\_9\\_\\_67\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__67_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur la règle de multiplication des déterminants;*  
par M. C. LE PAIGE.

(Séance du 4 février 1881.)

Soient les trois déterminants

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$
$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

où

(1)  $c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn} = a_{i1}b_{k1} + d_{ik}.$

Nous représentons par  $A_{pq}$ ,  $B_{pq}$  les mineurs de  $a_{pq}$ ,  $b_{pq}$  dans les déterminants A et B.

Cela posé, si nous multiplions le déterminant C par  $A_{11}$ , en multipliant par  $A_{11}$  les éléments de la première rangée, et que nous ajoutons à cette première rangée les  $n - 1$  dernières, respectivement multipliées par  $A_{21}$ ,  $A_{31}$ , ...,  $A_{n1}$ , nous aurons, en ayant égard aux relations (1) et aux identités

$$a_{1r}A_{11} + a_{2r}A_{21} + \dots + a_{nr}A_{n1} = \frac{A}{a_{rr}},$$

suivant que  $r$  est égal à 1 ou est différent de 1,

$$CA_{11} = A \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (1).$$

Multiplions les deux membres de cette identité par  $B_{11}$ , et ajoutons à la première colonne du déterminant qui figure dans le second membre les  $(n - 1)$  dernières, respectivement multipliées par  $B_{21}$ ,  $B_{31}$ , ...,  $B_{n1}$ ; nous aurons

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} 1 & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ a_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Or, en retranchant des  $(n - 1)$  dernières colonnes de ce déterminant la première, successivement multipliée par  $b_{21}$ ,  $b_{31}$ , ...,  $b_{n1}$ , nous trouvons, à cause de (1),

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} = AB \cdot D.$$

Il est visible que D est formé à l'aide de  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ , comme C au

(<sup>1</sup>) Cette formule se trouve également dans une petite Notice de M. Édouard Weyr (*Sitzb. der kön. böhm. Gesellschaft der Wiss.* Prague, 1880) et dans notre Mémoire *Sur quelques points de la théorie des formes algébriques* (*Mém. de la Soc. royale des Sciences de Liège.* 1880).

moyen de A et B. En conséquence, si la règle de multiplication est vraie pour deux déterminants d'ordre  $n - 1$ , elle est vraie pour deux déterminants d'ordre  $n$ .

Puisqu'elle est évidente pour  $n = 2$ , elle est générale.

---