

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LAQUIÈRE

Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 131-133.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__131_1

© Bulletin de la S. M. F., 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés
des centres de gravité; par M. E. LAQUIÈRE.*

(Séance du 5 mai 1882.)

La Note de M. Laisant, insérée au *Bulletin* (t. X, n° 2, p. 40),
rappelle un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, où

M. Resal étend aux polygones, plans ou gauches, le théorème de Pappus sur l'immobilité du centre de gravité de masses, égales entre elles, qui décrivent les côtés d'un triangle avec des vitesses de même sens et proportionnelles aux longueurs des côtés à parcourir, après être parties en même temps des sommets respectifs.

On pourrait donner à la généralisation du théorème de M. Resal la forme, d'apparence encore plus générale, suivante :

Si des masses partent en même temps des sommets d'un polygone fermé, plan ou gauche, pour en parcourir les côtés suivant une loi de mouvement identique, avec des vitesses à chaque instant proportionnelles aux côtés décrits, le centre de gravité du système des masses mobiles restera fixe.

L'observation sur le théorème de M. Resal, que j'ai faite dernièrement dans le Journal précité (3^e série, t. I, p. 110) s'applique à cette nouvelle généralisation que l'on peut, par une convenable distribution des masses, considérer quasi comme évidente.

M. Laisant, de son côté, démontre dans sa Note précitée que :

Si l'on considère un système de droites quelconques $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ dans l'espace et qu'on fasse tourner toutes ces droites, du même angle et dans le même sens, autour d'axes parallèles passant par leurs premières extrémités A_1, A_2, \dots, A_n , ce qui fait prendre aux secondes extrémités les nouvelles positions B'_1, B'_2, \dots, B'_n ;

Désignant par $G_a, G_b, G_{b'}$ les centres de gravité de la série des points A, de celle des points B, de celle des points B', affectés de masses quelconques, mais égales pour les trois points A_i, B_i et B'_i , de même indice :

Le centre de gravité $G_{b'}$ s'obtiendra par la rotation de G_b , du même angle et dans le même sens, autour d'un axe de rotation passant par G_a et parallèle aux premiers.

L'auteur, qui s'est imposé la tâche de divulguer en France la méthode des quaternions, donne de son théorème une élégante démonstration, basée sur ce genre de calcul. Toutefois, le théorème étant du domaine essentiel de la Mécanique rationnelle, nous ne croyons pas superflu d'observer qu'il est susceptible d'une démonstration immédiate et tout à fait élémentaire, par exemple

de la suivante, qui aurait probablement été choisie par Poinso, si ce grand géomètre avait songé au théorème de M. Laisant.

Désignons par $(A, \omega)B$ le déplacement linéaire, sens et grandeur, du point B tournant de l'angle ω , valeur donnée en grandeur et en signe, autour de l'axe mené par le point A parallèlement à une direction fixe. Il est évident que

$$(A, \omega)B + (B, \omega)A = 0.$$

On voit de même que, d'une manière générale,

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B + (A, \omega)C,$$

ou bien

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B - (C, \omega)A.$$

Par conséquent, dans le cas qui nous occupe,

$$BB' = (A, \omega)B = (G_a, \omega)B - (G_a, \omega)A.$$

Faisant la somme des n égalités semblables, appliquées aux n points B, et multipliées chacune par la masse m correspondante; considérant de plus que

$$(1) \quad \Sigma m(G_a, \omega)A = M(G_a, \omega)G_a = 0,$$

on obtient immédiatement

$$(2) \quad G_b G_{b'} = (G_a, \omega)G_b,$$

ce qui est le théorème général de M. Laisant.

Nota. — Les équations (1) et (2) ont été écrites suivant le mode usité dans le calcul des équipollences, les déplacements qui y figurent étant des droites géométriques. Pour conserver l'écriture vulgaire, il suffirait de considérer ces deux équations comme existant entre les projections de ces lignes sur un axe quelconque.