BULLETIN DE LA S. M. F.

C. STÉPHANOS

Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 134-137.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__134_0>

Sur la relation qui existe entre le problème de la Trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires; par M. Stephanos.

(Séance du 5 mai 1882.)

Depuis que les propriétés métriques des figures sont considérées, d'après Chasles, comme correspondant à des relations projectives de ces figures au cercle à l'infini sur la sphère, et que l'on est parvenu à obtenir les définitions projectives des diverses notions métriques, le problème de la Trigonométrie sphérique, problème qui revient à la détermination des relations qui lient les côtés d'un triangle sphérique à ceux de son triangle polaire, s'est montré comme équivalent à la recherche des relations qui existent entre les rapports anharmoniques déterminés par une conique C^2 sur les côtés de deux triangles de son plan, polaires réciproques par rapport à cette conique.

Dans la présente Note, je fais remarquer comment on peut ramener ce nouveau problème à la théorie du système simultané de trois formes binaires quadratiques et tirer de là les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

I. Supposons que l'on ait attribué d'une manière uniforme les valeurs d'un paramètre $x_1 : x_2$ aux divers points d'une conique C^2. A chaque droite du plan de cette conique sera ainsi attachée une forme binaire, quadratique en x_1, x_2, ayant pour zéros les paramètres des points de rencontre de la conique avec la droite.

En partant des propriétés des formes attachées de cette façon à plusieurs droites du plan de la conique C^2, on peut, comme on sait, retrouver toutes les relations projectives de ce système de droites à la conique C^2. Il doit donc y avoir moyen d'exprimer les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés a, b, c d'un triangle, en fonction des invariants du système simultané des trois formes quadratiques

$$a_x^2,\quad b_x^2,\quad c_x^2,$$

où

$$a_x^2 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,\quad b_x^2 = b_0 x_1^2 + \ldots,\quad c_x^2 = c_0 x_1^2 + \ldots,$$

respectivement attachées aux trois droites a, b, c.

Cela étant, pour avoir les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés l, m, n du triangle polaire réciproque de abc, il suffira de connaître les formes l_x^2, m_x^2, n_x^2 attachées aux côtés de ce nouveau triangle.

Or, en supposant que la droite l soit la polaire du point commun aux droites b et c, on remarque que la forme l_x^2 doit coïncider avec la jacobienne

$$(bc)b_xc_x = (b_0c_1 - b_1c_0)x_1^2 + (b_0c_2 - b_2c_0)x_1x_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)x_2^2,$$

des deux formes b_x^2 et c_x^2. Les formes attachées aux trois droites l, m, n doivent ainsi être égales à

$$l_x^2 = (bc)b_xc_x, \quad m_x^2 = (ca)c_xa_x, \quad n_x^2 = (ab)a_xb_x.$$

Les relations qui existent entre les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés des deux triangles abc et lmn pourront donc être déduites de celles qui relient les invariants du système des formes a_x^2, b_x^2, c_x^2 à ceux du système covariant l_x^2, m_x^2, n_x^2.

On parvient ainsi à ce résultat :

Les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique correspondent aux relations qui lient les invariants simultanés du système de formes binaires

$$a_x^2, \quad b_x^2, \quad c_x^2$$

à ceux du système covariant

$$l_x^2 = (bc)b_xc_x, \quad m_x^2 = (ca)c_xa_x, \quad n_x^2 = (ab)\,a_xb_x. \tag{1}$$

Nous allons indiquer tout de suite comment on peut passer effectivement de l'un de ces systèmes de formules à l'autre.

II. Soient α, β, γ les côtés d'un triangle sphérique ; λ, μ, ν ceux de son triangle polaire. Soient aussi a, b, c et l, m, n les traces sur le plan à l'infini des plans qui portent respectivement les arcs α, β, γ et λ, μ, ν; et supposons que les couples de points suivant lesquels le cercle à l'infini sur la sphère est coupé par les droites a, b, c et l, m, n soient représentés respectivement par les formes binaires a_x^2, b_x^2, c_x^2 et l_x^2, m_x^2, n_x^2, liées entre elles par les relations (1).

Les invariants du système simultané a_x^2, b_x^2, c_x^2 sont, comme on sait,

$$D_{11} = (aa')^2 = 2(a_0 a_2 - a_1^2), \qquad D_{22} = (bb')^2, \quad D_{33} = (cc')^2,$$
$$D_{23} = (bc)^2 = b_0 c_2 - 2 b_1 c_1 + b_2 c_0, \quad D_{31} = (ca)^2, \quad D_{12} = (ab)^2,$$
$$R = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

De même les invariants du système l_x^2, m_x^2, n_x^2 sont :

$$d_{11} = (ll')^2, \quad d_{22} = (mm')^2, \quad d_{33} = (nn')^2, \quad d_{23} = (mn)^2, \quad \ldots,$$
$$r = \begin{vmatrix} l_0, & m_0, & n_0 \\ l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, comme les formes l_x^2, m_x^2, n_x^2 sont liées à a_x^2, b_x^2, c_x^2 par les relations (1), on doit avoir

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & d_{11} = \frac{1}{2}(D_{22}D_{33} - D_{23}^2), \ \ldots, \ d_{23} = \frac{1}{2}(D_{31}D_{12} - D_{11}D_{13}), \ \ldots, \\ & r = R^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} D_{11}, & D_{21}, & D_{31} \\ D_{12}, & D_{22}, & D_{32} \\ D_{13}, & D_{23}, & D_{33} \end{vmatrix}, \\ & R^2 D_{11} = 2(d_{22}d_{33} - d_{23}^2), \ \ldots, \ R^2 D_{23} = 2(d_{31}d_{12} - d_{11}d_{23}), \ \ldots, \\ & 0 = D_{11}d_{21} + D_{12}d_{22} + D_{13}d_{23}, \quad 0 = D_{11}d_{31} + D_{12}d_{32} + D_{13}d_{33}, \ldots. \end{aligned} \right.$$

Maintenant les formules, essentielles pour notre but, qui permettent de passer des relations précédentes, bien connues, aux formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique sont les suivantes :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & \cos\alpha = \frac{D_{23}}{\sqrt{D_{22}D_{33}}}, \quad \cos\beta = \frac{D_{31}}{\sqrt{D_{33}D_{11}}}, \quad \cos\gamma = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \\ & \sin\alpha = \sqrt{\frac{2d_{11}}{D_{22}D_{33}}}, \quad \ldots, \\ & \cos\lambda = \frac{d_{23}}{\sqrt{d_{22}d_{33}}}, \quad \cos\mu = \frac{d_{31}}{\sqrt{d_{33}d_{11}}}, \quad \cos\nu = \frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}d_{22}}}, \\ & \sin\lambda = \varepsilon R \sqrt{\frac{\frac{1}{2}D_{11}}{d_{22}d_{33}}}, \quad \ldots \end{aligned} \right.$$

(où ε doit être pris égal à $+1$ ou à -1, suivant que R est positif ou négatif).

Dans ces formules, nous avons supposé : 1° que les formes a_x^2, b_x^2, c_x^2 ont été préparées de telle manière que l'on ait pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ des valeurs avec des signes voulus; 2° que les angles α, β, γ, et par conséquent aussi les angles λ, μ, ν ne sont point supérieurs à π. Si l'angle α (β ou γ) devait être plus grand que π, il faudrait faire précéder partout le radical $\sqrt{d_{11}}$ ($\sqrt{d_{22}}$ ou $\sqrt{d_{33}}$) du signe —.

La manière dont on peut tirer des relations (2) et (3) les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique n'offre aucune particularité notable.