Bulletin de la S. M. F.

P. Appell

Sur des cas de réductions des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 59-67.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__59_0>

Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables; par M. Appell.

(Séance du 3 mars 1882.)

La formule de réduction pour les fonctions Θ de deux variables que j'ai indiquée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 13 février 1882 peut être généralisée de la façon suivante :

I. Considérons la fonction

$$(1)\qquad \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid a_{ij}) = \sum_{m_i=-\infty}^{m_i=+\infty} e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_p x_p + \varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)},$$

où $\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ désigne la forme quadratique

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=p} a_{ij} m_i m_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Supposons que les périodes relatives à x_p,

$$2\pi\sqrt{-1},\ 2a_{p1},\ 2a_{p2},\ \ldots,\ 2a_{pp},$$

soient liées par $(p-1)$ relations distinctes à coefficients entiers de la forme

$$(2)\qquad k_{i1} a_{p1} + k_{i2} a_{p2} + \ldots + k_{ip} a_{pp} = h_i \pi \sqrt{-1},$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, (p-1),$$

les lettres k_{ij} et h_i désignant des nombres entiers. Dans cette hypothèse, les périodes relatives à x_p se réduisent à deux; et la fonction Θ définie par l'équation (1) peut être exprimée à l'aide de fonctions Θ de $(p-1)$ variables et de fonctions θ d'une variable.

Pour le montrer, remarquons d'abord que le déterminant des $(p-1)^2$ nombres entiers

$$k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{i,p-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

ne peut pas être nul. En effet, si ce déterminant était nul, on pourrait, en multipliant les deux membres des équations (2) par des entiers convenables et ajoutant, éliminer $a_{p1}, \ldots, a_{p,p-1}$ et obtenir une relation de la forme

$$N a_{pp} = N' \pi \sqrt{-1},$$

N et N′ étant entiers. Mais, comme la partie réelle de a_{pp} est négative et ne peut pas être nulle, on aurait nécessairement $N = 0$, $N' = 0$, et, par suite, les relations (2) ne seraient pas distinctes; ce qui est contre l'hypothèse.

Le déterminant des coefficients de $a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{p,p-1}$, dans les équations (2), n'étant pas nul, on peut résoudre ces équations par rapport à ces quantités, et l'on en tirera des expressions de la forme

$$(3) \qquad k'_i a_{pi} = k''_i a_{pp} + l_i \pi \sqrt{-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

k'_i, k''_i, l_i étant des entiers; certains des nombres k''_i et l_i peuvent être nuls. Je suppose, pour plus de généralité, que $k''_1, k''_2, \ldots, k''_\nu$ soient nuls, $k''_{\nu+1}, k''_{\nu+2}, \ldots, k''_{p-1}$ étant différents de zéro; en multipliant les deux membres des équations (3) par des entiers convenables, on pourra faire en sorte que les coefficients de a_{pp} dans les $p - \nu - 1$ dernières des équations (3) deviennent égaux au plus petit commun multiple de $k''_{\nu+1}, k''_{\nu+2}, \ldots, k''_{p-1}$. Ces relations (3) peuvent alors s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} n_i a_{pi} = q_i \pi \sqrt{-1}, & (i = 1, 2, \ldots, \nu), \\ n_{\nu+j} a_{p,\nu+j} = n_p a_{pp} + q_{\nu+j} \pi \sqrt{-1}, & (j = 1, 2, \ldots, p - \nu - 1). \end{cases}$$

Dans ces relations (4), on peut toujours supposer les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ *positifs;* pour les ν nombres n_i la chose est évidente, car on peut évidemment changer les signes des deux membres des ν premières équations; quant aux $(p - \nu - 1)$ nombres $n_{\nu+j}$, on remarquera d'abord que l'on peut ramener les parties réelles des périodes $a_{p,\nu+j}$ à être négatives, car l'on peut, dans la fonction (1), changer le signe de $a_{p,\nu+j}$ à condition de changer en même temps le signe de toutes les autres périodes dont *un seul* des indices est $(\nu + j)$ et celui de $x_{\nu+j}$; cela revient en effet à changer $m_{\nu+j}$ en $-m_{\nu+j}$. Les parties réelles des périodes $a_{p,\nu+j}$

étant ainsi ramenées à être négatives comme la partie réelle de a_{pp}, les entiers $n_{\nu+j}$ et n_p sont de même signe, et, comme on peut changer les signes des deux membres des équations (4), on peut faire en sorte que les entiers $n_{\nu+j}$ et n_p soient positifs.

Cela posé, faisons

$$(5)\qquad m_\rho = n_\rho \mu_\rho + t_\rho,\quad (0 \leq t_\rho \leq n_\rho - 1),\quad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

μ_ρ et t_ρ désignant des entiers dont l'un est le quotient et l'autre le reste de la division de m_ρ par n_ρ.

On obtient toutes les valeurs de m_ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et seulement une fois chacune de ces valeurs en faisant, dans (5), varier μ_ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et t_ρ de 0 à $n_\rho - 1$.

L'on a, d'après cela, pour la fonction (1), l'expression

$$(6)\qquad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{\mu_\rho=+\infty} e^{(n_1\mu_1+t_1)x_1+\ldots+(n_p\mu_p+t_p)x_p+\varphi(n_1\mu_1+t_1,\ldots,n_p\mu_p+t_p)}.$$

Posons

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p), \\ \alpha_\rho = n_\rho x_\rho + n_\rho \dfrac{\partial \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p)}{\partial t_\rho} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, p); \end{cases}$$

l'expression (6) de la fonction Θ considérée devient

$$(8)\qquad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{\mu_\rho=+\infty} e^{\alpha+\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\ldots+\mu_p\alpha_p+\varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_p\mu_p)};$$

on a identiquement

$$\varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_p\mu_p) = \varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_{p-1}\mu_{p-1}, 0)$$
$$+ 2 n_p \mu_p(\mu_1 n_1 a_{p1} + \mu_2 n_2 a_{p2} + \ldots + \mu_{p-1} n_{p-1} a_{p,p-1}) + n_p^2 \mu_p^2 a_{pp};$$

remplaçons dans le coefficient de $2 n_p \mu_p$ les quantités

$$n_1 a_{p1},\ n_2 a_{p2},\ \ldots,\ n_{p-1} a_{p,p-1}$$

par leurs valeurs (4); nous avons

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_p\mu_p) = \varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_{p-1}\mu_{p-1}, 0), \\ + n_p^2 a_{pp}(\mu_p^2 + 2\mu_p\mu_{\nu+1} + 2\mu_p\mu_{\nu+2} + \ldots + 2\mu_p\mu_{p-1}) + 2M\pi\sqrt{-1}, \end{cases}$$

M étant entier; cette expression (9) peut s'écrire

$$
(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_p\mu_p)\\
&\quad = \varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_{p-1}\mu_{p-1}, 0)\\
&\quad - n_p^2 a_{pp}(\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \ldots + \mu_{p-1})^2\\
&\quad + n_p^2 a_{pp}(\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \ldots + \mu_{p-1} + \mu_p)^2 + 2\mathrm{M}\pi\sqrt{-1}.
\end{aligned}\right.
$$

Dans cette expression (10), la partie indépendante de μ_p, à savoir :

$$\varphi(n_1\mu_1, n_2\mu_2, \ldots, n_{p-1}\mu_{p-1}, 0) - n_p^2 a_{pp}(\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \ldots + \mu_{p-1})^2,$$

est une forme quadratique $\Phi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1})$ des $p-1$ variables $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$; et si l'on écrit cette forme de la façon suivante :

$$
(11)\qquad \Phi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}) = \sum_{i,j=0}^{i,j=p-1} \mathrm{A}_{ij}\mu_i\mu_j, \quad (\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}_{ji}),
$$

on a

$$
(11')\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{ii} = n_i^2 a_{ii}, && \text{si } i \leq \nu,\\
&\mathrm{A}_{ii} = n_i^2 a_{ii} - n_p^2 a_{pp}, && \text{si } i > \nu,\\
&\mathrm{A}_{ij} = n_i n_j a_{ij}, && \text{si } i \text{ ou } j \leq \nu,\\
&\mathrm{A}_{ij} = n_i n_j a_{ij} - n_p^2 a_{pp}, && \text{si } i \text{ et } j > \nu.
\end{aligned}\right.
$$

D'après cela, dans la somme (8), l'exposant de e peut s'écrire, en laissant de côté $2\mathrm{M}\pi\sqrt{-1}$, qui est une période de la fonction exponentielle,

$$\alpha + \mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_p\alpha_p + a_{pp}n_p^2(\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \ldots + \mu_p)^2 + \Phi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1})$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_\nu\alpha_\nu + \mu_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1} - \alpha_p) + \ldots\\
&\quad + \mu_{p-1}(\alpha_{p-1} - \alpha_p) + \Phi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1})\\
&+ (\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \ldots + \mu_{p-1} + \mu_p)\alpha_p + a_{pp}n_p^2(\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \ldots + \mu_p)^2.
\end{aligned}
$$

Cela posé, faisons dans l'expression (8) la sommation par rapport à μ_p en laissant toutes les autres quantités constantes; nous pourrons mettre en facteur, dans le terme général de cette somme, la quantité

$$
(12)\qquad e^{\alpha + \mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_{p-1}(\alpha_{p-1} - \alpha_p) + \Phi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1})},
$$

et nous aurons à faire la somme

$$\sum_{\mu_p=-\infty}^{\mu_p=+\infty} e^{(\mu_{\nu+1}+\ldots+\mu_p)\alpha_p+a_{pp}n_p^2(\mu_{\nu+1}+\ldots+\mu_p)^2},$$

somme qui n'est autre que $\theta_3(\alpha_p|2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 a_{pp})$ (¹); la sommation par rapport à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ donne ensuite à chercher la somme des termes tels que (12), somme qui est égale à

$$e^\alpha \Theta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}-\alpha_p, \ldots, \alpha_{p-1}-\alpha_p | A_{ij}).$$

Donc enfin

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p | a_{ij})$$
$$= \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} e^\alpha \Theta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}-\alpha_p, \ldots, \alpha_{p-1}-\alpha_p | A_{ij})\theta_3(\alpha_p|2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 a_{pp}).$$

Telle est la formule de réduction annoncée.

II. Il est un autre cas, où la fonction Θ, définie par la série (1), subit une réduction analogue : c'est le cas où les p groupes de périodes simultanées des $(p-1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ se réduisent à $(p-1)$ groupes distincts. Cette circonstance se présente lorsque, entre les périodes relatives à ces variables, ont lieu des relations de la forme

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{c} k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \ldots + k_{p-1} a_{i,p-1} + k_p a_{i,p} = h_i \pi\sqrt{-1}, \\ (i = 1, 2, \ldots, p-1), \end{array} \right.$$

$k_1, k_2, \ldots, k_p, h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}$ étant des *nombres entiers*.

Il importe de remarquer que k_p ne peut pas être nul; en effet, supposons $k_p = 0$, multiplions la première des relations (13) par k_1, la seconde par k_2, ... la dernière par k_{p-1}, et ajoutons; nous avons

$$\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}, 0) = M\pi\sqrt{-1},$$

M étant réel. Or cette relation est impossible, car, quelles que

(¹) Je désigne par $\theta_3(z | \omega, \omega')$ la fonction θ_3 formée avec ω et ω' (Voir *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, p. 115).

soient les valeurs attribuées aux entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$, la partie réelle de $\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ est *négative* et n'est jamais *nulle*. Il n'est donc pas permis de supposer $k_p = 0$. Mais il peut arriver que certains des entiers $k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}$ soient nuls.

Je vais traiter le cas où *aucun des entiers* $k_1, k_2, \ldots, k_p$ n'est égal à zéro. Ces entiers ont d'ailleurs des signes quelconques. Faisons, comme précédemment,

$$(14) \qquad m_\rho = k_\rho \mu_\rho + t_\rho, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

μ_ρ et t_ρ étant deux entiers dont le second t_ρ est positif et satisfait à l'une ou l'autre des conditions

$$(15) \qquad \begin{cases} 0 \le t_\rho \le k_\rho - 1 & \text{si } k_\rho > 0, \\ 0 \le t_\rho \le -k_\rho - 1 & \text{si } k_\rho < 0. \end{cases}$$

L'on obtient encore toutes les valeurs de m_ρ en faisant varier μ_ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et donnant à t_ρ les valeurs satisfaisant aux conditions (15). La série (1) peut donc s'écrire

$$(16) \qquad \sum_{t_\rho} \sum_{\mu_\rho = -\infty}^{\mu_\rho = +\infty} e^{(k_1\mu_1 + t_1)x_1 + \ldots + (k_p\mu_p + t_p)x_p + \varphi(k_1\mu_1 + t_1, \ldots, k_p\mu_p + t_p)}.$$

Le signe $\sum\limits_{t_\rho}$ indique une somme étendue aux valeurs (15) de $t_1, t_2, \ldots, t_p$. Posons

$$(17) \qquad \begin{cases} \beta = t_1 x_1 + \ldots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p), \\ \beta_\rho = k_\rho x_\rho + k_\rho \dfrac{\partial \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p)}{\partial t_\rho} \quad (\rho = 1, 2, \ldots p); \end{cases}$$

l'exposant de e, dans la somme (16), devient

$$(18) \qquad \beta + \mu_1 \beta_1 + \ldots + \mu_p \beta_p + \varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \ldots, k_p \mu_p).$$

Dans cet exposant, écrivons, au lieu de $\varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \ldots, k_p \mu_p)$,

$$\varphi[k_1 \mu_p + k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2 \mu_p + k_2(\mu_2 - \mu_p), \ldots, \\ k_{p-1} \mu_p + k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), k_p \mu_p + 0],$$

et développons par la série de Taylor, en considérant

$$k_1(\mu_1 - \mu_p), \quad k_2(\mu_2 - \mu_p), \quad \ldots, \quad k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), \quad 0$$

comme les accroissements des variables. Il est aisé de voir que, en vertu des relations (13), ce développement se réduit à

$$\varphi(k_1\mu_p, k_2\mu_p, \ldots, k_p\mu_p) + \varphi[k_1(\mu_1-\mu_p), k_2(\mu_2-\mu_p), \ldots, k_{p-1}(\mu_{p-1}-\mu_p), 0] + 2N\pi\sqrt{-1},$$

N étant entier; en effet, le coefficient de $k_i(\mu_i - \mu_p)$, dans ce développement, est $\dfrac{\partial\varphi(k_1\mu_p, k_2\mu_p, \ldots, k_p\mu_p)}{\partial(k_i\mu_p)}$, c'est-à-dire

$$2\mu_p(k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \ldots + k_p a_{ip})$$

ou, d'après (13), $2\mu_p h_i \pi\sqrt{-1}$.

L'expression (18) peut donc s'écrire

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta + (\mu_1-\mu_p)\beta_1 + (\mu_2-\mu_p)\beta_2 + \ldots + (\mu_{p-1}-\mu_p)\beta_{p-1} \\ \quad + \varphi[k_1(\mu_1-\mu_p), \ldots, k_{p-1}(\mu_{p-1}-\mu_p), 0] + \mu_p(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p) \\ \quad + \mu_p^2\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p) + 2N\pi\sqrt{-1}. \end{array}\right.$$

Alors, dans la somme (16), laissons d'abord μ_p constant et sommons par rapport à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$; nous pourrons mettre en facteur dans le terme général l'expression

$$(20)\qquad e^{\beta+\mu_p(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p)+\mu_p^2\varphi(k_1,k_2,\ldots,k_p)},$$

et la somme à évaluer sera

$$\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_{p-1}=-\infty}^{\mu_1,\ldots,\mu_{p-1}=+\infty} e^{(\mu_1-\mu_p)\beta_1+\ldots+(\mu_{p-1}-\mu_p)\beta_{p-1}+\varphi[k_1(\mu_1-\mu_p),\ldots,k_{p-1}(\mu_{p-1}-\mu_p),0]},$$

c'est-à-dire une fonction Θ de $p-1$ variables

$$\Theta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1} | k_{i'} k_{j'} a_{i'j'}) \quad \begin{pmatrix} i' = 1, 2, \ldots, p-1 \\ j' = 1, 2, \ldots, p-1 \end{pmatrix}.$$

Si ensuite nous faisons la sommation par rapport à μ_p, nous avons à évaluer la somme des expressions (20), μ_p variant de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui donne

$$e^{\beta}\theta_3[\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p)].$$

Donc enfin, d'après la formule (16),

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p | a_{ij}) \\ \quad = \sum\limits_{t_\rho} e^{\beta}\Theta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1} | k_{i'} k_{j'} a_{i'j'}) \\ \qquad \times \theta_3[\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p)]; \end{array}\right.$$

ce qui donne l'expression cherchée.

Il est à remarquer que $2\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ se réduit, en négligeant un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, à

$$k_p \frac{\partial\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p)}{\partial k_p},$$

car les relations (13) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p)}{\partial k_i} = 2h_i\pi\sqrt{-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

III. Une méthode analogue s'applique au cas où, dans les relations (13), certains des entiers $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sont nuls. Si l'on suppose

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_\nu = 0,$$

$k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \ldots, k_p$ étant différents de zéro, il faudra poser

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \mu_\lambda & (\lambda &= 1, 2, \ldots, \nu), \\ m_{\nu+\rho} &= k_{\nu+\rho}\mu_{\nu+\rho} + t_\rho & (\rho &= 1, 2, \ldots, p-\nu), \end{aligned}$$

les entiers t_ρ étant assujettis à la condition

$$(22) \qquad \begin{cases} 0 \leq t_\rho \leq k_{\nu+\rho} - 1 & \text{si} \quad k_{\nu+\rho} > 0, \\ 0 \leq t_\rho \leq -k_{\nu+\rho} - 1 & \text{si} \quad k_{\nu+\rho} < 0. \end{cases}$$

La fonction Θ (1) peut alors s'écrire

$$(23) \quad \sum_{t_\rho} \sum_{\mu_i=-\infty}^{\mu_i=+\infty} e^{\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_\nu x_\nu + (\mu_{\nu+1}k_{\nu+1} + t_1)x_{\nu+1} + \ldots + (\mu_p k_p + t_{p-\nu})x_p + \varphi(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, k_{\nu+1}\mu_{\nu+1} + t_1, \ldots, k_p\mu_p + t_{p-\nu})},$$

le signe $\sum\limits_{t_\rho}$ indiquant une sommation faite par rapport à $t_1, t_2, \ldots, t_{p-\nu}$ et étendue aux valeurs (22).

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \gamma &= t_1 x_{\nu+1} + t_2 x_{\nu+2} + \ldots + t_{p-\nu} x_p + \varphi(0, 0, \ldots, 0, t_1, \ldots, t_{p-\nu}), \\ \gamma_\lambda &= x_\lambda + 2(a_{\lambda,\nu+1} t_1 + a_{\lambda,\nu+2} t_2 + \ldots + a_{\lambda p} t_{p-\nu}), \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu), \\ \gamma_{\nu+\rho} &= k_{\nu+\rho} x_{\nu+\rho} + k_{\nu+\rho} \frac{\partial\varphi(0, 0, \ldots, 0, t_1, \ldots, t_{p-\nu})}{\partial t_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, p-\nu), \end{aligned}$$

$$\Theta'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}) = \sum_{m_1, \ldots m_{p-1}=-\infty}^{m_1, \ldots, m_{p-1}=+\infty} e^{m_1\xi_1 + \ldots + m_{p-1}\xi_{p-1} + \varphi(m_1, \ldots, m_\nu, k_{\nu+1}m_{\nu+1}, \ldots, k_{p-1}m_{p-1}, 0)},$$

l'on obtient, comme précédemment, la formule de réduction

$$(24)\quad \begin{cases} \theta(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid a_{ij}) \\ \quad = \sum_{t_\rho} e^{\gamma} \theta'(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-1}) \\ \qquad \times \theta_3[\gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} + \ldots + \gamma_p \mid 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(0, 0, \ldots, 0, k_{\nu+1}, \ldots, k_p)]. \end{cases}$$

Ici encore l'on a, en négligeant un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$,

$$2\varphi(0, 0, \ldots, 0, k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \ldots, k_p) \equiv k_p \frac{\partial\varphi(0, 0, \ldots, k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \ldots, k_p)}{\partial k_p}.$$