BULLETIN DE LA S. M. F.

FOURET

Sur une propriété relative à deux systèmes matériels composés d'une même nombre de points ayant des masses égales chacune à chacune

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 53-59.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__53_1>

Sur une propriété relative à deux systèmes matériels, composés d'un même nombre de points ayant des masses égales chacune à chacune; par M. Fouret.

(Séance du 1er décembre 1882.)

1. Imaginons dans l'espace deux systèmes, composés chacun de n points et comprenant : l'un les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, l'autre les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$. Supposons, en outre, que les points correspondants des deux systèmes soient doués de la même masse, et désignons les masses respectives des n points de chaque système par $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (1). Rapportons séparément les deux groupes de points à deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, parallèles entre eux et ayant pour origines respectives les centres de gravité des deux systèmes.

Soient, d'une manière générale, x_i, y_i, z_i les coordonnées, par rapport à Ox, Oy, Oz, du point A_i; x'_i, y'_i, z'_i les coordonnées,

(1) Dans ce qui va suivre, et tant que nous resterons sur le terrain de la Géométrie, nous pourrons, pour plus de généralité, supposer que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient des coefficients, les uns positifs, les autres négatifs; mais leur somme sera toujours supposée différente de zéro.

par rapport à $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ du point A'_i. Soient enfin, par rapport à un troisième système d'axes $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, respectivement parallèles à ceux des deux premiers, a, b, c les coordonnées du point O; a', b', c' les coordonnées du point O'.

Les coordonnées respectives des points A_i et A'_i, par rapport au système $(\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta)$, sont évidemment $a+x_i$, $b+y_i$, $c+z_i$, $a'+x'_i$, $b'+y'_i$, $c'+z'_i$, et l'on a par suite

$$A_iA_i'^2 = (a+x_i-a'-x'_i)^2 + (b+y_i-b'-y'_i)^2 + (c+z_i-c'-z'_i)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{A_iA'_i}^2 &= (a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2+(x_i-x'_i)^2\\ &\quad+(y_i-y'_i)^2+(z_i-z'_i)^2+2(a-a')x_i+2(b-b')y'\\ &\quad+2(c-c')z_i-2(a-a')x'_i-2(b-b')y'_i-2(c\quad c')z'_i. \end{aligned}\right.$$

Mais on a

$$(2)\qquad (a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2 = \overline{OO'}^2,$$

$$(3)\qquad (x_i-x'_i)^2+(y_i-y'_i)^2+(z_i-z'_i)^2 = \overline{B_iB'_i}^2,$$

en désignant par B_i et B'_i ce que deviennent respectivement les deux points A_i, A'_i, lorsqu'on transporte les deux systèmes $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ parallèlement à eux-mêmes, de manière à faire coïncider leurs centres de gravité.

On a d'ailleurs, puisque les points O et O' sont les centres de gravité respectifs des deux systèmes,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma m_ix_i &= 0, & \Sigma m_iy_i &= 0, & \Sigma m_iz_i &= 0;\\ \Sigma m_ix'_i &= 0, & \Sigma m_iy'_i &= 0, & \Sigma m_iz'_i &= 0. \end{aligned}\right.$$

En tenant compte des relations (2), (3) et (4), ajoutons membre à membre les n relations, déduites de (1), en faisant i successivement égal à 1, 2, ..., n, après en avoir multiplié les deux membres respectivement par $m_1, m_2, \ldots, m_n$; nous obtenons

$$(5)\qquad \Sigma m_i\overline{A_iA'_i}^2 = M.\overline{OO'}^2 + \Sigma m_i\overline{B_iB'_i},$$

M n'étant autre chose que Σm_i, c'est-à-dire la masse totale de chaque système.

Ce résultat, qui nous a paru nouveau, peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes matériels composés d'un même nombre de points ayant chacun à chacun les mêmes masses, la somme des produits obtenus en multipliant le carré de la distance de deux points homologues des deux systèmes par la masse commune de ces points est égale au produit obtenu en multipliant le carré de la distance des centres de gravité des deux systèmes par la masse commune de ces systèmes, augmentée de la somme des produits obtenus en multipliant par la masse commune de deux points homologues le carré de la nouvelle distance de ces deux points, après que les deux systèmes ont été transportés parallèlement à eux-mêmes, de manière à faire coïncider leurs centres de gravité.*

De ce théorème résulte immédiatement le corollaire suivant :

Étant donnés deux systèmes matériels composés d'un même nombre de points ayant chacun à chacun les mêmes masses, la somme des produits obtenus en multipliant le carré de la distance de deux points homologues des deux systèmes par la masse commune de ces points reste constante : 1° *lorsque ces deux systèmes se déplacent parallèlement à eux-mêmes l'un par rapport à l'autre, de manière que la distance de leurs centres de gravité reste invariable;* 2° *lorsque ces deux systèmes tournent d'un même angle et dans le même sens autour d'axes parallèles passant par leurs centres de gravité respectifs.*

2. Du théorème très général que nous avons démontré plus haut, il est facile de déduire d'autres théorèmes, bien connus d'ailleurs, qui sont d'un usage fréquent en Mécanique.

On peut supposer que deux ou plusieurs points de l'un quelconque des systèmes viennent à coïncider : le théorème subsiste, pourvu qu'au point unique résultant de cette coïncidence se trouvent concentrées les masses des divers points superposés.

Si, en particulier, on suppose que les n points du système $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ viennent à coïncider en O', centre de gravité de ce système, la distance $A_iA'_i$ devient $O'A_i$, $B_iB'_i$ devient égale à OA_i, et la relation (5) peut s'écrire

$$\Sigma m_i \overline{O'A_i}^2 = M.\overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2. \tag{6}$$

On retrouve ainsi le théorème suivant, que l'on rencontre souvent dans les Traités de Géométrie ou de Mécanique :

Étant donné un système de points matériels, la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance à un point fixe donné est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance au centre de gravité du système, augmentée du produit de la masse totale du système par le carré de la distance de son centre de gravité au point fixe donné.

3. Considérons maintenant un système de points matériels $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ et un axe quelconque (D). Sur cet axe, projetons orthogonalement les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivement en $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$. On sait que le centre de gravité O du système $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ se projette sur (D) au centre de gravité O' du système $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$, à condition que chacun des points du second système soit considéré comme ayant la même masse que le point du premier dont il est la projection. Il résulte de là que la relation (5) s'applique aux deux systèmes ainsi définis. Mais, dans le cas considéré, $\Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2$ a une signification bien connue : c'est le moment d'inertie du système $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ par rapport à (D). Pareillement, $\Sigma m_i \overline{B_i B'_i}^2$ n'est autre chose que le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (D) transporté parallèlement à lui-même au centre de gravité O.

On retrouve ainsi cette propriété fondamentale des moments d'inertie, consistant en ce que *le moment d'inertie d'un système matériel par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie du même système par rapport à un axe parallèle au premier et passant par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale du système par le carré de la distance des deux axes.*

4. Nous venons de déduire de notre théorème général deux

théorèmes qui concernent : l'un le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe, et l'autre ce qu'on pourrait appeler le moment d'inertie d'un système par rapport à un point. Nous allons, d'une manière semblable, établir un troisième théorème relatif à ce qu'on pourrait appeler le moment d'inertie d'un système de points matériels par rapport à un plan.

A cet effet, considérons un système $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ et un plan quelconque (P). Soient A'_1, A'_2, $\ldots$, A'_n les projections sur le plan (P) des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On sait que le centre de gravité O du système $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ a pour projection sur le plan (P) le centre de gravité O′ du système $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$, chacun des points du second système étant considéré comme ayant même masse que le point du premier dont il est la projection. La relation (5) est par suite applicable aux deux systèmes considérés, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Étant donné un système de points matériels, la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance (¹) *à un plan fixe donné est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance à un plan parallèle au plan donné et passant par le centre de gravité du système, augmentée du produit de la masse totale du système par le carré de la distance de son centre de gravité au plan donné.*

5. Le théorème démontré au commencement de cette Note conduit encore très simplement à un théorème bien connu sur la force vive d'un système matériel.

Supposons que $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \ldots, A_n A'_n$ représentent, en grandeur, direction et sens, les déplacements linéaires simultanés des divers points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un système matériel. Il est clair que OO′ représente en grandeur, direction et sens, le déplacement correspondant du centre de gravité du système.

Nous pouvons appliquer la relation (5) aux deux systèmes $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Mais les segments, tels que $B_i B'_i$, ont alors une signification très simple ; ils sont égaux aux

(¹) Les distances dont il est ici question peuvent être, pour plus de généralité, comptées parallèlement à une même direction fixe quelconque.

déplacements subis, dans l'intervalle de temps considéré, par les points du système $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, *relativement* à un système de comparaison animé d'un mouvement de translation identique au mouvement du centre de gravité O. En divisant les déplacements simultanés par l'élément de temps, supposé infiniment petit, pendant lequel ils s'effectuent, on conclut de (5) la relation

$$(7)\qquad \Sigma m_i v_i^2 = MV^2 + \Sigma m_i u_i^2,$$

dans laquelle v_i est la vitesse absolue de A_i, u_i la vitesse relative du même point par rapport au système de comparaison défini plus haut, et V la vitesse du centre de gravité du système.

Ainsi se trouve démontré le théorème suivant qui joue, comme on le sait, un rôle important en Mécanique :

A un instant quelconque, la somme des forces vives d'un système matériel est égale à celle qu'aurait sa masse entière condensée en son centre de gravité, augmentée de la somme des forces vives du système dans son mouvement relatif par rapport à ce centre de gravité.

6. Revenons maintenant à la Géométrie. En remarquant que l'on a, dans la figure définie au début de cette Note,

$$\overline{B_i B'_i}^2 = \overline{OA_i}^2 + \overline{O'A'_i}^2 - 2.\overline{OA_i}^2.\overline{O'A'_i}^2.\cos(OA_i, O'A'_i),$$

on peut écrire la relation (5) de la manière suivante :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 &= M.\overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 \\ &\quad + \Sigma m_i \overline{O'A'_i}^2 - 2\Sigma m_i OA_i.O'A'_i \cos(OA_i, O'A'_i). \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose que les points des deux systèmes soient situés respectivement sur deux droites (D) et (D'), la dernière relation devient

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 &= M.\overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 \\ &\quad + \Sigma m_i \overline{O'A'}^2 - 2(\Sigma m_i OA_i O'A'_i)\cos(D, D'); \end{aligned}\right.$$

et, dans le cas où les droites (D) et (D') sont rectangulaires, elle se réduit à

$$(10)\qquad \Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 = M.\overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 + \Sigma m_i \overline{O'A'_i}^2.$$

En variant et particularisant les données, on déduirait facilement de ces relations divers théorèmes de Géométrie que nous n'énoncerons pas ici. Nous nous contenterons d'en conclure, comme exemple, une propriété connue du quadrilatère.

Soit *abcd* un quadrilatère quelconque, plan ou gauche. Désignons par θ l'angle des deux directions *ab* et *cd*, et considérons deux systèmes matériels composés l'un des points *a* et *b*, l'autre des points *c* et *d* correspondant respectivement à *a* et à *b*. Si l'on suppose les masses des quatre points égales à l'unité, les centres de gravité des deux systèmes seront les points milieux *p* et *q* de *ab* et de *cd*, et, en appliquant la relation (9), on aura

$$(11)\qquad \overline{ac}^2 + \overline{bd}^2 = 2\overline{pq}^2 + 2\overline{pa}^2 + 2\overline{qc}^2 - 4pa.qc\cos\theta.$$

Associons maintenant respectivement les points *a* et *b* du premier système aux points *d* et *c* du second; nous aurons, en appliquant de nouveau la relation (9), et observant que les directions *ab* et *dc* font entre elles l'angle $\pi - \theta$:

$$(12)\qquad \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 = 2\overline{pq}^2 + 2\overline{pa}^2 + 2\overline{qc}^2 + 4pa.qc\cos\theta.$$

En ajoutant membre à membre les relations (11) et (12), nous obtenons la relation bien connue

$$\overline{ac}^2 + \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{bd}^2 = 4\overline{pq}^2 + \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2.$$