

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur certains développements en série de puissances

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 65-69.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__65_1

© Bulletin de la S. M. F., 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur certains développements en série de puissances ;

Par M. APPELL.

(Séance du 18 février 1883).

Les développements en série dont je me suis occupé (*Mathematische Annalen*, t. XXI, p. 118, et *Acta mathematica*, t. I, p. 145) conduisent aux remarques suivantes :

I. Soient deux cercles C et C' qui ne sont pas entièrement intérieurs l'un à l'autre. Alors toute fonction $f(x)$, holomorphe en tous les points du plan extérieurs à la fois aux deux cercles, est,

en ces points, représentée par une série de la forme

$$(1) \quad f(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \frac{A'_\nu}{(x-a')^\nu} \right].$$

a et a' désignant les affixes des centres des deux cercles. Cela posé :

1° Si les deux cercles n'ont aucun point commun, ce développement (1) n'est possible que d'une manière; les coefficients A_ν et A'_ν sont déterminés par les formules

$$2\pi i A_\nu = \int_C f(x)(x-a)^{\nu-1} dx, \quad 2\pi i A'_\nu = \int_{C'} f(x)(x-a')^{\nu-1} dx.$$

2° Si les deux cercles se coupent ou seulement se touchent, le développement (1) est possible d'une infinité de manières; en d'autres termes, on peut former une infinité de séries de la forme (1) ayant pour somme zéro. Il suffit pour cela de prendre une fonction $\varphi(x)$ holomorphe en tous les points non communs aux deux cercles; cette fonction $\varphi(x)$ sera, à l'extérieur de C , développable en une série de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{(x-a)^\nu};$$

à l'extérieur de C' , cette même fonction sera développable en une série de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{B'_\nu}{(x-a')^\nu}; \quad B'_0 = B_0 = \varphi(\infty);$$

la différence de ces deux séries

$$S(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{B_\nu}{(x-a)^\nu} - \frac{B'_\nu}{(x-a')^\nu} \right]$$

est une série convergente en dehors des deux cercles C et C' et ayant pour somme zéro. On peut donc ajouter cette série $S(x)$ au développement (1) sans que ce développement cesse de représenter $f(x)$.

Mais on peut préciser davantage l'indétermination du développement (1) et montrer que, dans ce développement, les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots$ peuvent être pris *arbitrairement* pour toutes les valeurs de ν inférieures à un nombre déterminé $n + 1$, si grand soit-il. Pour mettre ce fait en évidence, considérons la série $S'(x)$ obtenue en prenant les dérivées des termes de la série $S(x)$

$$S'(x) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{-\nu B_\nu}{(x-a)^{\nu+1}} + \frac{\nu B_\nu}{(x-a')^{\nu+1}} \right];$$

cette série est aussi convergente en dehors des cercles C et C' , et elle a aussi *pour somme zéro*. D'une façon générale désignons par $S^{(k)}(x)$ la série formée par les dérivées d'ordre k des termes de la série $S(x)$: cette série sera convergente aux mêmes points que $S(x)$ et aura *pour somme zéro*. Nous pouvons de plus supposer que, dans $S(x)$, le coefficient B_1 est différent de zéro; par exemple, pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre pour la fonction $\varphi(x)$ qui a servi à former $S(x)$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-a},$$

a étant un point commun aux deux cercles; alors $B_1 = 1$.

Cela posé, nous pouvons, sans changer la somme de la série (1), lui ajouter le développement

$$\lambda_0 S(x) + \lambda_1 S'(x) + \dots + \lambda_{n-1} S^{(n-1)}(x),$$

dont la somme est nulle; mais on pourra déterminer les paramètres

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$$

de façon que, dans la nouvelle série

$$f(x) + \lambda_0 S(x) + \lambda_1 S'(x) + \dots + \lambda_{n-1} S^{(n-1)}(x),$$

les coefficients de

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(x-a)^n}$$

prennent des valeurs données d'avance. Donc ces coefficients peuvent être pris arbitrairement, comme nous l'avons annoncé.

Les coefficients de $\frac{1}{x-a'}$, $\frac{1}{(x-a')^2}$, ..., $\frac{1}{(x-a')^n}$ sont alors déterminés par les formules suivantes dans lesquelles l'indice CC' indique que les intégrales qui en sont affectées sont prises sur une courbe fermée enveloppant les deux cercles C et C'.

$$\begin{aligned}
 A_0 &= f(\infty), \\
 \int_{CC'} f(x) dx &= 2\pi i (A_1 + A'_1), \\
 \int_{CC'} x f(x) dx &= 2\pi i (a A_1 + a' A'_1 + A_2 + A'_2), \\
 \int_{CC'} x^2 f(x) dx &= 2\pi i (a^2 A_1 + a'^2 A'_1 + 2a A_2 + 2a' A'_2 + A_3 + A'_3), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

II. Supposons que les deux cercles C et C' ne soient pas entièrement extérieurs l'un à l'autre ; alors toute fonction $f(x)$, holomorphe aux points situés à la fois à l'intérieur du cercle C et à l'extérieur du cercle C', est développable en une série de la forme

$$(2) \quad f(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[A_\nu (x-a)^\nu + \frac{A'_\nu}{(x-a')^\nu} \right];$$

comme précédemment, ce développement est possible d'une infinité de manières ou d'une seule manière, suivant que les cercles C et C' se coupent ou ne se coupent pas.

III. Ces résultats s'étendent aisément aux cas où l'on considère un plus grand nombre de cercles.

Une fonction $f(x)$ holomorphe en tous les points situés à la fois à l'intérieur d'un cercle de centre a et à l'extérieur de n cercles de centres a_1, a_2, \dots, a_n est développable en ces points en une série convergente de la forme

$$(3) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu (x-a)^\nu + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{(x-a_k)^\nu}.$$

1° Si les cercles en question n'ont aucun point commun, ce développement n'est possible que d'une seule manière ; les coeffi-

cients sont déterminés par les équations

$$(4) \quad 2\pi i A_\nu = \int_C \frac{f(x)}{(x-a)^{\nu+1}} dx, \quad 2\pi i A_\nu^{(k)} = \int_{C_k} f(x)(x-a_k)^{\nu-1} dx,$$

les indices C et C_k indiquant que les intégrales sont prises sur les circonférences C ou C_k de centres a ou a_k .

2° Si au contraire deux ou plusieurs des cercles en question se coupent ou seulement se touchent, le développement en série (3) est possible d'une infinité de manières; le degré d'indétermination des coefficients A_ν et $A_\nu^{(k)}$ est fixé par les conditions suivantes: si le cercle C ou l'un des cercles C_k n'est rencontré par aucun autre cercle, les coefficients A_ν ou $A_\nu^{(k)}$ relatifs à ce cercle sont toujours déterminés par les formules (4) et ne sont susceptibles que d'une valeur; ce ne sont que les coefficients relatifs aux cercles qui se rencontrent qui sont susceptibles d'une infinité de valeurs.
