TCHEBICHEFF

Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes, à l'aide de systèmes articulés

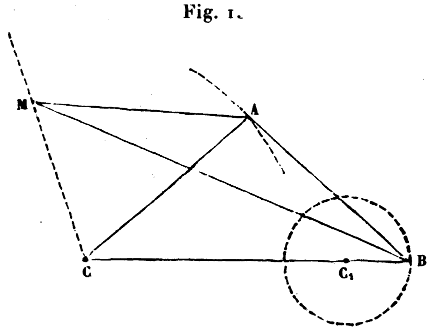
Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 179-187.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__179_1>

Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes, à l'aide de systèmes articulés; par M. Tchebicheff.

(Séance du 21 novembre 1884.)

1. Soient (*fig.* 1) ABC, ABM deux triangles isoscèles, ayant un côté commun AB, égal aux côtés AC, AM. Si l'on fait mouvoir

Fig. 1.



les sommets A, B du triangle ABM sur les cercles décrits du sommet C du triangle ABC et d'un point quelconque C_1 pris sur son côté BC, le sommet M du triangle ABM décrit, comme il n'est pas difficile de s'en assurer, une courbe symétrique autour de l'axe passant par les points M, C. Si la ligne BC_1 n'est pas trop longue, elle peut faire un tour complet autour du centre C_1, et alors le point M décrit une courbe fermée, symétrique autour d'un axe, comme nous venons de le dire. Ceci nous présente une transformation très simple du mouvement rotatoire en mouvement sur les lignes fermées, de formes très variées et symétriques autour de certains axes. Une telle transformation du mouvement rotatoire pourra être avantageusement employée dans la pratique, si l'on trouve les conditions sous lesquelles la courbe décrite par le point M s'approche suffisamment près de celles qui donnent la solution de quelques problèmes cinématiques. C'est ce que nous allons faire maintenant pour les cas les plus simples et les plus fréquents dans la pratique : ainsi, quand on cherche à avoir le mouvement sur un cercle ou sur une ligne droite.

2. Arrêtons-nous d'abord au eas où le point M doit décrire approximativement le cercle complet, quand la ligne BC_1 tourne une fois autour du centre C_1. Nous supposerons données les longueurs $AC = AB$, BC_1 et la distance CC_1 des centres C, C_1, et nous chercherons le cercle duquel, par un choix convenable de l'angle BAM, s'approche le plus la courbe décrite par le point M. D'après l'expression de la limite des écarts que présentera cette courbe avec le cercle duquel elle s'approche le plus possible, il sera aisé de voir les conditions que doivent remplir la longueur des lignes $AC = AB$, BC_1 et la distance des centres C, C_1, pour que ces écarts soient admissibles dans la pratique.

Pour y parvenir, nous calculons d'abord les inclinaisons de la ligne AC sur CC_1 (ligne des centres C, C_1) pour deux positions qui correspondent aux moments où le point B se trouve sur la ligne CC_1 ou son prolongement.

En désignant par φ_1, φ les angles de ces inclinaisons, on les trouvera à l'aide des formules

$$\cos\varphi = \frac{CC_1 + BC_1}{2AC}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{CC_1 - BC_1}{2AC}.$$

D'après les angles φ, φ_1, on chercherap deux angles auxiliaires θ, ψ, qui se déterminent ainsi :

$$\sin(2\theta - \varphi_1) = \frac{\sin\frac{\varphi_1+\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_1-\varphi}{2}};$$

$$\cos\psi = \frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi_1}.$$

Au moyen des angles φ, φ_1, θ, ψ, on trouve aisément tout ce qu'il est important de savoir :

1° L'angle BAM avec lequel le triangle ABM, par son sommet M, décrit la courbe la plus proche possible d'un cercle ; 2° le rayon du cercle auquel s'approche le plus cette courbe ; 3° la distance de son centre du point C ; 4° enfin la limite des écarts de ce cercle et de la courbe décrite par le sommet M. On y parvient à l'aide des formules suivantes :

$$BAM = 2\pi - 2\theta - \varphi - \psi,$$

$$R = \frac{\sin\frac{2\theta-\varphi_1+\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi_1+\varphi}{2}} BC_1,$$

$$OC = \frac{\cot\frac{\varphi_1+\varphi}{2}\cos\psi}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_1-\varphi}{2}\cos\frac{2\theta+\varphi-\psi}{2}} BC_1,$$

$$E = \pm\frac{\sin\frac{\psi+\varphi_1-2\theta}{2}\sin\frac{2\theta+\varphi+\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi_1+\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_1-\varphi}{2}\cos\frac{2\theta+\varphi-\psi}{2}} BC_1,$$

où R (*fig.* 2) est le rayon du cercle décrit approximativement par le sommet M, OC la distance de son centre O du point C, et E la limite des écarts de cette courbe (n° 3). D'après la valeur de E et les équations qui déterminent les angles auxiliaires θ, φ, il est clair que la courbe décrite par le sommet M s'approche très près d'un cercle toutes les fois que la différence des angles φ_1, φ est très petite. Pour appliquer les formules précédentes à ce cas particulier, qui est le plus intéressant pour la pratique, nous ferons

$$\frac{\varphi_1+\varphi}{2} = \varphi_0,$$

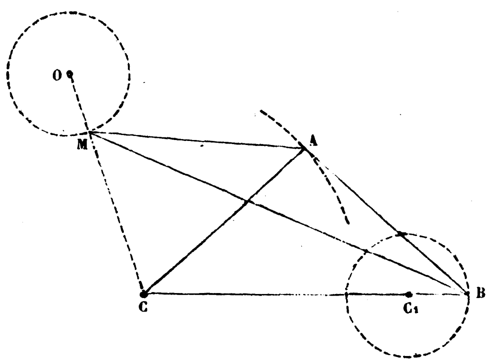
$$\frac{\varphi_1-\varphi}{2} = \delta,$$

en supposant que δ ait une petite valeur. D'après ces égalités, on a

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \delta, \quad \varphi = \varphi_0 - \delta.$$

En portant ces valeurs de φ, φ_1 dans les formules précédentes,

Fig. 2.



nous obtenons, par le développement en série et ne tenant compte que de premiers termes avec δ,

$$\text{BAM} = 2\pi - 4\varphi_0 - \frac{3\,\text{tang}^2\varphi_0 - 1}{4\,\text{tang}\,\varphi_0}\,\delta^2,$$

$$\text{R} = \left(1 + \frac{3\,\text{tang}^2\varphi_0 - 1}{8\,\text{tang}^2\varphi_0}\,\delta^2\right)\text{BC}_1,$$

$$\text{OC} = \left(\frac{\cot\varphi_0}{\delta} + \frac{5 - 3\,\text{tang}^2\varphi_0}{24\,\text{tang}\,\varphi_0}\,\delta\right)\text{BC}_1,$$

$$\text{E} = \pm\frac{\delta}{\sin 2\varphi_0}\,\text{BC}_1.$$

Ces formules nous donnent, au δ^2 près,

$$\frac{\text{E}}{\text{R}} = \pm\frac{\delta}{\sin 2\varphi_0}.$$

D'un autre côté, en cherchant la différence

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1,$$

d'après les formules qui déterminent les angles φ, φ_1, on obtient

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1 = \frac{\text{BC}_1}{\text{AC}};$$

d'où, en substituant les valeurs de φ, φ_1, on tire, à δ^2 près,

$$\frac{BC_1}{AC} = 2 \sin\varphi\, \delta_0.$$

D'après cela, on voit que les rapports

$$\frac{E}{R}, \frac{BC_1}{AC}$$

tendent en même temps vers zéro quand la différence $\varphi_1 - \varphi = \delta$ s'approche elle-même de zéro, et comme on trouve, en divisant l'un de ces rapports par l'autre,

$$\frac{E}{R} : \frac{BC_1}{AC} = \pm \frac{1}{2 \sin 2\varphi_0 \sin\varphi_0},$$

il est clair que, pour diminuer autant que possible les valeurs du rapport

$$\frac{E}{R},$$

correspondant avec les valeurs données de

$$\frac{BC_1}{AC},$$

voisines de zéro, on doit prendre, pour φ_0, l'angle qui rend *minimum* la valeur numérique de la fonction

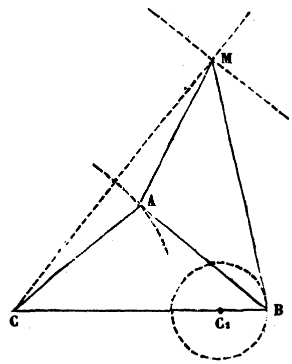
$$\sin 2\varphi_0 \sin\varphi_0.$$

Ainsi l'on parvient à un système articulé, où le mouvement circulaire du point B autour du centre C_1 se transforme en un autre mouvement du point M sur une ligne différant peu du cercle décrit du centre O. En remarquant que, dans ce système, les points M, B se meuvent autour des centres O, C_1 dans les sens opposés, on conclut que ce système donne la solution du même problème que les *manivelles antirotatives*. Dans cette transformation de rotation, on ne rencontre pas du tout de points morts, et l'on peut faire varier la loi qui lie entre elles les vitesses de deux manivelles, en transportant le centre d'oscillation de l'élément AC.

4. Passons au cas où l'on cherche à rapprocher, le plus près possible d'une ligne droite, toute la courbe fermée, décrite par le

sommet M. Nous supposerons que le triangle MAB est placé, comme on le voit, sur la *fig.* 3. Dans cette hypothèse, et en dé-

Fig. 3.



signant par t une quantité auxiliaire plus grande que O, on trouve $AC = AB = BM$, CC_1 et la limite des écarts E se déterminent par les formules suivantes :

$$AC = AB = AM = \frac{1 + t^2}{t\sqrt{2 - t^2}} BC_1,$$

$$\cos MAB = -\tfrac{1}{2}t^2,$$

$$CC_1 = \frac{1}{t\sqrt{2 + t^2}} BC_1,$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2 - t^2} - t(t^2 + 2)}{2(1 + t^2)},$$

$$E = \pm \frac{t^2}{\sqrt{2 - t^2}} BC_1.$$

La ligne droite que le sommet M décrira approximativement est normale à l'axe de symétrie CM, et sa distance du centre C a pour valeur

$$\left(\frac{2}{t} - \frac{t^2}{\sqrt{2 - t^2}}\right) BC_1.$$

En cherchant la loi du mouvement du sommet M par rapport à l'axe de symétrie MC, on trouve que la distance de M à cet axe s'exprime par la formule

$$\pm BC_1 \sin\alpha \sqrt{\frac{\tang^2\varphi + F(1-\cos\alpha)}{1-F(1-\cos\alpha)} - \sqrt{\frac{2-t^2}{2+t^2}}},$$

où α désigne l'angle variable que fait la ligne BC_1 pendant sa rotation avec le prolongement de la ligne des centres CC_1, et F une quantité constante égale à

$$\frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2}.$$

Daprès cette formule, il n'est pas difficile d'assigner les limites entre lesquelles reste le point M pendant son mouvement, et qui déterminent la longueur de la ligne droite décrite approximativement.

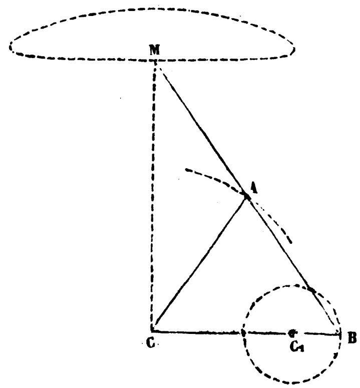
D'autre part, cette formule fait voir que les courses d'aller et de retour du point M ne correspondent pas aux mêmes angles de rotation de la ligne BC_1 autour du centre C_1, et que la différence entre ces deux angles est d'autant plus grande que la quantité t s'éloigne plus de O; par conséquent, ce système présente une transformation directe d'un mouvement rotatoire continu en mouvement rectiligne alternatif, et *vice versa,* où les courses d'aller et de retour se feront dans des temps inégaux, la vitesse de rotation étant constante. Ce système peut donc être employé comme un *mécanisme à retour rapide.* De plus, comme le point M effectue une de ses courses, presque rectiligne, dans le temps où la ligne BC_1 fait autour du centre C_1 plus d'un demi-tour, ce système peut être avantageusement employé pour faire tourner un axe à l'aide d'un pied. En appliquant de tels systèmes à deux manivelles coudées à un axe sous l'angle 180°, on obtiendra un mécanisme pour tourner l'axe avec deux pieds, qui aura l'avantage de ne pas présenter des points morts.

5. Dans le cas précédent, nous avons cherché à rapprocher, le plus près possible d'une ligne droite, toute la courbe fermée, décrite par le point M quand la ligne rotatoire de la ligne BC_1 fait un tour complet autour du centre C_1. Nous allons nous occuper maintenant du cas où l'on cherche ce rapprochement pour une

partie de cette courbe correspondant à un demi-tour de la ligne BC_1 autour du centre C_1, savoir : depuis $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{\pi}{2}$.

Nous nous bornerons au cas le plus simple, où le triangle MAB se réduit à une ligne droite MAB (*fig.* 4), ce qui revient à donner

Fig. 4.



à l'angle MAB une valeur égale à 180°. Dans ce cas, les lignes $AC = AB = AM$, CC_1 et la limite des écarts E se déterminent par les formules suivantes :

$$AC = AB = AM = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} BC_1,$$

$$CC_1 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} BB_1,$$

$$E = \pm \frac{\sqrt{272 + 104\sqrt{7}} - \sqrt{305 + 92\sqrt{7}}}{12} BC_1.$$

D'après l'équation de la courbe que décrit le point M dans ce système, on reconnaît aisément que la partie qui correspond à la rotation de la ligne BC_1 d'un quart de tour en haut et en bas de sa position primitive est presque rectiligne. Après avoir parcouru cette partie de sa trajectoire, le point M se lève et fait sa marche de retour, en montant peu à peu jusqu'au milieu de sa course et en s'abaissant suivant la même loi, après avoir dépassé ce milieu. Un tel mouvement du point M, dans lequel se transforme directement le mouvement rotatoire de la ligne BC_1, dans notre système, peut avoir des applications utiles. Si l'on applique de tels systèmes à deux manivelles coudées à un axe sous l'angle 180°, on obtient un mécanisme où la rotation d'un axe se transforme en mouvement de deux points qui, tour à tour, parcourent la même ligne presque droite, et dont chacun se lève au-dessus de cette ligne après l'avoir parcouru quand l'autre s'abaisse sur elle pour la parcourir à son tour. En ne considérant que l'espace où se trouve la partie presque rectiligne de la trajectoire de ces points, on reconnaît aisément qu'ils produisent approximativement le même effet que les points équidistants de la circonférence d'une roue tournante quand son rayon est infiniment grand. Donc, sous ce rapport, le système dont nous venons de parler peut bien jouer le rôle d'une roue infiniment grande.