Bulletin de la S. M. F.

M. Marchand

Méthode pour mener les plans tangents aux surfaces gauches

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 34-48.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__34_1>

Méthode pour mener les plans tangents aux surfaces gauches; par M. J. Marchand.

(Séance du 14 novembre 1884.)

1. *Définitions.* — Nous appelons *axoïde* toute surface gauche ayant une directrice rectiligne, et *axe* celle-ci.

Nous distinguons deux classes parmi ces surfaces :

Dans la première nous rangeons les conoïdes droits;

Dans la deuxième toutes les autres, qui prendront le nom d'*axoïdes ordinaires*.

Tout plan perpendiculaire à l'axe sera dit *plan principal;* l'orientation commune de tous les plans que l'on peut ainsi mener sera la *direction principale,* enfin leurs intersections avec l'axoïde les *sections principales :* dans les conoïdes nous réserverons cette dénomination à leurs intersections à l'infini avec les plans principaux, en faisant abstraction des génératrices que ces plans peuvent contenir. On donnera également le nom de *point principal* au point de rencontre de l'axe avec un plan principal.

Tout plan contenant l'axe sera dit *axial :* toute génératrice rectiligne de la surface est ainsi contenue dans un plan axial, que nous appellerons aussi quelquefois son *plan de variance.* Plusieurs génératrices peuvent avoir même plan de variance, mais nous ne considérons jamais que l'une d'entre elles à la fois; le point où elle coupera l'axe sera son *point axial,* l'angle qu'elle forme avec l'axe en prenant toujours l'axe comme droite origine, son *angle axial.*

2. Cela posé, supposons que par tous les points axiaux d'un axoïde quelconque, et dans les mêmes plans axiaux que les génératrices correspondantes, on trace des droites telles que le rapport de la tangente de leur angle axial β à la tangente de l'angle axial α de la génératrice qui leur correspond soit constant et égal à une quantité complètement arbitraire μ. On formera ainsi un nouvel axoïde, ayant même axe, mêmes points axiaux que le premier, et dont les génératrices seront correspondantes une à une des génératrices de celui-ci, et liées par la relation

$$\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha} = \mu.$$

Ce nouvel axoïde, qu'on peut immédiatement obtenir à l'aide du premier, qui sera dit l'*axoïde fixe,* sera lui-même un axoïde variant; la constante μ s'appellera le *rapport de variance,* enfin deux génératrices issues d'un même point axial seront deux *correspondantes.*

Il résulte immédiatement de ces définitions :

1° *Que, pour un axoïde fixe, il existe une infinité de variants;*

2° *Que nous pouvons prendre arbitrairement comme surface fixe l'un des deux axoïdes;*

3° *Que deux axoïdes variants d'un troisième sont variants l'un de l'autre.*

Soit maintenant le cône directeur de l'axoïde fixe, et par son sommet conduisons une parallèle à l'axe; en considérant cette droite comme axe du cône, on pourra lui appliquer des constructions analogues aux précédentes et définir ainsi un cône, qui sera directeur de l'axoïde variant et pourra être considéré comme variant du cône de l'axoïde fixe, jouissant par rapport à lui de propriétés identiques à celles ci-dessus énumérées.

Nous dirons enfin, quand les surfaces variantes que nous aurons à examiner seront dans la position même qui résulte de leur mode de génération, c'est-à-dire avec axe, points et plans axiaux superposés, qu'elles sont non déplacées; lorsque nous les aurons fait glisser, par rapport à l'axoïde fixe, le long de l'axe, par un mouvement de translation d'une quantité déterminée a, qu'elles sont déplacées, et a sera le déplacement.

3. Théorème. — *Si deux cônes variants ou deux axoïdes variants non déplacés sont coupés par un plan principal, les sections principales correspondantes sont homothétiques, et le point principal du plan sécant est le centre d'homothétie.*

Cette proposition est évidente.

4. Théorème. — *L'intersection de deux cônes variants déplacés est une section principale.*

Soit, en effet, oo_1p l'axe commun des deux cônes, et om, o_1m deux génératrices correspondantes; du point m, où elles se coupent, abaissons mp perpendiculaire à l'axe.

En observant que

$$oo_1 = a \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha} = \mu,$$

on a

$$op = a\,\frac{\mu}{\mu - 1}.$$

5. Les deux théorèmes qui précèdent conduisent immédiatement aux remarques suivantes :

1° Si la surface conique est plane (nous entendons par là un plan faisant avec l'axe un angle quelconque non égal à 90°), ses variantes seront également planes. Les sections principales correspondantes seront alors des droites parallèles normales à l'axe, et les lignes de plus grandes pentes de ces plans par rapport à la direction principale, issues de leur sommet commun, seront contenues dans le même plan axial.

Par conséquent, si un axoïde ordinaire a pour surface directrice un plan, ses variants auront également des plans pour surfaces directrices.

2° Si le *rapport de variance* varie d'une manière continue entre $-\infty$ et $+\infty$, pour ces deux limites, le cône variant se réduit au plan principal issu du sommet du cône; pour la valeur zéro, il se réduit à l'axe.

Par conséquent, le conoïde obtenu en conservant l'axe et les points et plans axiaux d'un système de surfaces variantes est la limite commune de ces surfaces lorsque le rapport de variance devient égal à $\pm\infty$, et l'axe est la limite de ces surfaces pour la valeur zéro de ce rapport.

D'après cela, les surfaces de la première classe peuvent en général être considérées comme les limites des surfaces de la deuxième; on peut en conclure aussi qu'une surface de la première classe peut d'une infinité de manières différentes dériver de celles de la seconde, puisque tous les systèmes de variants ayant même axe, mêmes points et plans axiaux, ont le même conoïde pour limite.

6. Théorème. — *L'intersection d'un axoïde et d'un variant de son cône directeur déplacé d'un mouvement de translation, de manière que son sommet vienne se placer sur l'axe de l'axoïde, se projette sur le plan principal mené par ce sommet, suivant une courbe homothétique à la section principale correspondante, et le sommet est le centre d'homothétie.*

Prenons un point axial quelconque de la surface, et dans ce plan les deux génératrices correspondantes oM_1, GM_1 de la surface et du cône. Ces droites font respectivement avec l'axe OG les angles α et β. Soit également m_1MG la trace du plan principal conduit par le sommet G du cône variant sur le plan axial; cette trace est normale à l'axe. Projetons sur elle M_1 en m_1; de M_1 également abaissons M_1K_1 perpendiculaire sur l'axe, et de M la normale Mm.

On a par hypothèse

$$\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha} = \mu.$$

D'ailleurs, puisque

$$m_1 G = M_1 m + MG,$$

il viendra immédiatement

$$\frac{m_1 G}{MG} = \frac{\mu}{\mu - 1},$$

ce qui établit la proposition.

7. Ce théorème permet de mener le plan tangent à un axoïde ordinaire, en un point quelconque d'une de ses génératrices. Soit, en effet, une telle surface définie par son axe, une de ses sections principales et son cône directeur.

Nous voulons obtenir son plan tangent au point M_1 de la génératrice AB; par le point principal G du plan sécant, comme sommet, faisons passer un variant du cône directeur; nous pourrons toujours le supposer tel qu'il passe par le point M_1, et tracer sur la figure la génératrice M_1G, correspondante de AB : ce cône détermine par son intersection avec l'axoïde une courbe dont la tangente en M_1 pourra être construite.

En effet, d'après le théorème précédent, on connaît son plan projetant. Contenue, d'autre part, dans le plan tangent au cône variant le long de la génératrice M_1G, nous voyons :

1° Que, si nous menons par G, GI trace du plan tangent au cône variant qui est parallèle à la trace du plan tangent au cône directeur le long de la génératrice correspondante de GI;

2° Que, si par m_1, projection de M_1 sur le rayon vecteur GA, nous conduisons m_1I parallèle à la tangente au point A de la section principale NAP, le point I où ces deux droites se rencontrent est la trace de cette tangente sur la section principale, et par suite un point de la trace du plan tangent à l'axoïde en M_1 : AI est donc cette trace, et le plan tangent est déterminé.

8. D'après cela, étant donné un axoïde, dont en deux points M_1, M_2, situés sur une même génératrice AB, on connaît le plan tangent, nous menons un plan principal que nous considérons comme plan horizontal de projection. Soient m_1, m_2 les projections des deux points M_1, M_2 sur ce plan; si par m_1 nous traçons une parallèle à l'horizontale du plan tangent en M_2, par m_2 une parallèle à l'horizontale du plan tangent en M_1, leur point d'intersection I, joint au point principal G, détermine une droite GI parallèle à l'horizontale du plan tangent au cône directeur le long de sa génératrice correspondant à AB.

9. Ce corollaire donne alors le suivant :

Si nous prenons trois points M_1, M_2, M_3 *sur* AB, *et leurs projections* m_1, m_2, m_3 *sur un plan principal, en menant par l'un quelconque de ces points projections* (m_2 *par exemple*) *des parallèles aux horizontales des plans tangents en* M_1, M_3, *par* m_1 *et* m_3 *des parallèles à l'horizontale du plan tangent en* M_2, *ces deux couples de droites se coupent sur la droite* II'G *parallèlement menée par* G *à l'horizontale du plan tangent* *au cône directeur de la surface le long de la génératrice qui correspond à* AB.

10. Ne considérant que les deux points M_1, M_2, supposant M_1 fixe et M_2 se déplaçant sur la génératrice, l'horizontale de son plan tangent s'obtiendra en joignant le point fixe m_1 au point I mobile sur la droite fixe GI, et déterminée à chaque instant par l'intersection de GI avec la parallèle à l'horizontale du plan tangent en M_1 issue de sa projection mobile m_2. Si donc M_2 partant de M_1 marche vers le point B, le point I se rapprochera de G, se confondra avec lui, puis, lorsque M_2 aura dépassé B, s'en éloignera indéfiniment : l'horizontale m_1I pivotera ainsi autour du point m_1 en faisant d'abord avec AG un angle de plus en plus petit; quand I se confondra avec le point G, cet angle sera nul; il changera de signe lorsque I aura dépassé G, et, lorsque I se sera transporté à l'infini sur IG, m_1I deviendra parallèle à IG. Si nous imaginons maintenant que M_2 s'éloigne de M_1 en marchant vers A, I s'éloignera indéfiniment de G, l'angle Gm_1I ira constamment en augmentant; mais, quand le point I sera à l'infini, m_1I sera encore devenue parallèle à IG.

Résumant cette étude, nous dirons : Sur un axoïde ordinaire, 1° si en deux points situés sur une génératrice AB les plans tangents sont différents, il existera en général en un point quelconque d'une génératrice un seul plan tangent à la surface; 2° ce plan tangent exécute une rotation continue autour de la génératrice, au fur et à mesure que le point de contact se déplace sur elle, de façon que, si celui-ci passe continuellement de $-\infty$ à $+\infty$, le plan tangent a exécuté une rotation continue de 180°; 3° les deux infinis sont les seuls points pour lesquels les plans tangents se confondent; 4° le plan tangent à l'infini est parallèle au plan tangent au cône directeur le long de sa génératrice similaire de celle que l'on considère sur la surface; 5° enfin dans un axoïde tout plan axial fait partie du système des plans tangents, le long de la génératrice qu'il détermine, et c'est le point axial qui est le point de contact. L'axe aussi bien qu'une génératrice est donc tangent à l'axoïde en une infinité de points; mais il se distingue aux génératrices rectilignes de la surface, en ce qu'il peut ne l'être que dans une partie limitée de son étendue.

Remarques. — 1° En dernière analyse, pour déterminer le plan tangent en un point quelconque d'un axoïde ordinaire, il faut et il suffit que les plans tangents en trois points nous soient connus. De plus, pour que la construction puisse s'effectuer avec succès, il faut que les deux parallèles $m_1 I$, $m_2 I$ se coupent en un point fini. Or rien dans notre théorème fondamental ne suppose que ces deux droites ne soient pas parallèles. Si le fait se produisait pour une génératrice, le point I se transporterait à l'infini; par suite GI deviendrait parallèle aux deux droites $m_1 I$, $m_2 I$. Les trois plans en M_1, M_2, et à l'infini se confondraient; le plan tangent serait encore le même en un autre point quelconque M_3 et par suite tout le long de la génératrice; il ne saurait y avoir de doute que pour le seul point axial. En effet, si l'évanouissement du plan tangent distinct est manifeste pour tout autre point de contact, le plan axial au contraire ne change pas, et il est, évidemment, toujours tangent à la surface; au reste, c'est là une question spéciale que nous voulions simplement signaler.

2° Il pourrait se faire également que la génératrice considérée fût parallèle ou perpendiculaire au plan de projection.

Dans ces deux hypothèses la construction s'évanouit. Cette difficulté sera levée plus loin. Bornons-nous à remarquer que la génératrice normale au plan horizontal est parallèle au plan vertical; la question résolue dans le premier cas la résout par cela même pour le deuxième cas.

11. Le problème inverse du plan tangent, d'après la construction précédente, n'offre aucune difficulté : nous croyons donc inutile d'y insister.

12. On sait que deux surfaces gauches se raccordent le long d'une droite AB, lorsque ces deux surfaces ont trois plans tangents communs en trois points de cette génératrice commune.

Cela posé, soit une surface quelconque dont nous connaissons les trois plans tangents en trois points M_1, M_2, M_3 de la génératrice AB.

Dans le plan tangent en M_3, et par ce point de contact, traçons une droite faisant avec la génératrice AB un angle quelconque mais différant de 90°. Par un point G sur cette droite nous élevons un plan perpendiculaire. Ce plan qui rencontre AB est pris par nous comme plan principal d'un axoïde ordinaire, qui aurait M_3G pour axe et dont on nous donne en outre sur AB, aux points M_1 et M_2, comme plans tangents, ceux mêmes dont nous venons de parler. La surface gauche et l'axoïde ayant trois plans tangents communs aux trois points M_1, M_2, M_3 de AB se raccorderont le long de cette droite.

13. Cette proposition prouve que toutes les propriétés énoncées au n° 10 comme caractéristiques des plans tangents aux axoïdes s'appliqueront sans restriction aux surfaces gauches en général, et en second lieu que les constructions qui permettent, connaissant trois plans tangents sur une génératrice AB d'un axoïde, de trouver un autre plan tangent sur la même génératrice s'appliqueront à une surface gauche quelconque.

14. Cela posé, si une génératrice d'une surface gauche AB rencontre le plan de projection, arbitraire d'ailleurs, comme un plan quelconque conduit suivant AB est tangent quelque part sur AB, le plan projetant de cette droite sur le plan de projection sera tangent à la surface quelque part sur AB, en B par exemple.

Supposons alors connus les trois plans tangents aux points M_1, M_2 et M_3. La surface se raccordera évidemment suivant AB avec un axoïde ayant, aux points M_1 et M_2 par exemple, mêmes plans tangents que la surface et pour axe la perpendiculaire abaissée du point B sur le plan de projection. Le théorème du n° 8 pourra être alors généralisé ainsi :

Une surface gauche quelconque étant donnée ainsi qu'un plan de projection également arbitraire (sous la restriction qu'il ne soit pas parallèle à la génératrice AB que l'on considère), *prenons sur cette droite trois points* M_1, M_2, M_3 *en lesquels le plan tangent est connu, et projetons orthogonalement ces trois points en* m_1, m_2, m_3; *sur le plan de projection par* m_1 *et* m_3 *menons des parallèles à l'horizontale du plan tangent en* M_2, *par* m_2 *des parallèles aux horizontales des plans tangents aux points* M_1 *et* M_3, *les deux droites du deuxième couple ainsi défini couperont en général respectivement celles du premier en deux points* $I_{1,2}$, $I_{3,2}$; *joignons ces deux points :*

1° *La droite ainsi obtenue est parallèle à la trace sur le plan de projection du plan tangent à l'infini à la surface gauche suivant* AB.

2° *Cette parallèle coupe* Ab, *projection de cette génératrice, au point b où se projette le point de contact* B *du plan tangent à la surface en* AB, *qui est normal au plan de projection, c'est-à-dire au point du contour apparent de la surface sur le plan de projection qui appartient à la projection de cette génératrice.*

Remarque. — Les raisonnements qui conduisent à cet énoncé supposent que les trois points M_1, M_2 et M_3 ont des plans tangents distincts; s'il en était autrement, nous en serions avertis par les données mêmes; d'ailleurs, dans cette hypothèse, la possibilité de définir l'axoïde de raccordement n'en existerait pas moins, la surface présenterait simplement le long de AB les particularités que nous avons déjà signalées plus haut : il est à observer seulement que dans ce cas le point B reste absolument arbitraire.

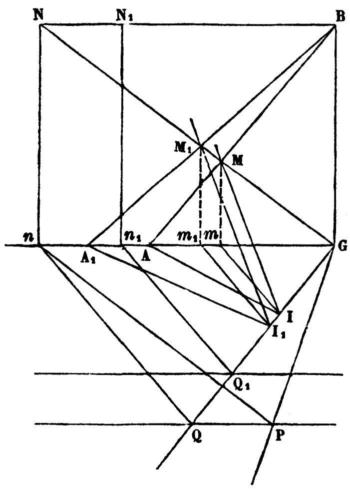
14. Nous avons ainsi, à condition de changer de plan de projection, la solution générale du problème des plans tangents aux surfaces gauches, quand sur une génératrice trois plans tangents seront connus. Nous voulons montrer maintenant que les axoïdes de la première classe et en général toutes les surfaces gauches ayant un plan directeur parallèle au plan de projection admettent une construction propre. Cette construction pourra s'appliquer également lorsque sur une surface gauche se présenteront des génératrices dont le plan tangent à l'infini sera horizontal.

15. Plaçons-nous dans les conditions du théorème du n° 6; seulement, au lieu du cône variant qui a son sommet en G et de l'axoïde fixe, considérons tout le système des variants de celui-ci, en nous proposant de comparer leurs plans tangents aux points successifs, où la génératrice GN du cône coupe les diverses génératrices correspondantes contenues dans le plan axial ABG.

Représentons alors deux de ces génératrices BA, BA_1 coupées en M et M_1 par la droite GN et cherchons à déterminer les traces des plans tangents en ces points. Une remarque antérieure nous a appris que les tangentes en A et A_1 aux sections principales de base sont parallèles; si donc nous projetons M et M_1 sur le plan principal en m et m_1, il faudra par ces points mener des parallèles à cette direction commune; ces droites couperont en I et I_1 la parallèle GP conduite par le point principal à l'horizontale du plan tangent à l'infini.

Si l'on joint ensuite AI, A_1I, MI, M_1I_1, les deux premières de ces quatre droites représenteront les traces horizontales des deux plans cherchés, les deux dernières les tangentes aux points correspondants M et M_1 aux courbes d'intersection du cône avec les deux axoïdes variants.

Si, considérant l'un des deux axoïdes comme fixe, on suppose que l'autre se déforme en donnant à son coefficient de variance des valeurs croissantes, la génératrice BA_1 tournera autour du point B pour atteindre, lorsque le coefficient sera ∞, la position limite NB. D'ailleurs dans ce mouvement le point M_1 se sera dé-



placé pour atteindre à la limite le point N. Dans ce même temps sa projection viendra en n, et si par n nous menons nQ parallèle à mI, le point Q représentera un point de la trace horizontale du plan tangent au conoïde limite. D'ailleurs à ce moment le point A_1 aura passé à l'infini : cette trace sera donc devenue parallèle à NB. Le point Q est ainsi l'intersection des deux droites nQ, GQ, qui sont définies, comme on le sait, quand l'axoïde fixe du système l'est également.

Si maintenant nous avions un deuxième point N_1 sur le conoïde, et qu'on voulût déterminer son plan tangent, il suffirait de répéter la construction en menant par n_1 une parallèle à mI jusqu'à sa rencontre avec GQ en Q_1, qui appartient, d'après ce qui précède, à la trace du plan tangent cherché.

Je dis maintenant que, si nous avions pris un point P quelconque sur la trace horizontale du plan tangent en N au conoïde, les droites nP, PG auraient pu jouer le même rôle que Qn et GQ.

En effet, nous savons que le conoïde proposé est la limite de tous les systèmes qui ont même axe, mêmes points et mêmes plans axiaux. Rien donc ne s'oppose à ce que nous définissions complètement le système en ajoutant à ces données deux directions absolument arbitraires pour MQ et GQ, sous la condition unique que les parallèles à ces deux directions, menées par n et G respectivement, se coupent quelque part sur la trace horizontale du plan. Il serait aisé d'ailleurs de le démontrer en comparant entre eux deux triangles qui sont semblables et qui résultent de la double construction.

De là la proposition suivante :

Un conoïde droit étant donné et NB *une génératrice, au point* N *de laquelle on connaît son plan tangent, au point n qui représente sa projection sur le plan principal qui sert de plan de projection et au point principal* G *joignons un point quelconque* P *de la trace horizontale du plan tangent en* N; *si ensuite on veut déterminer le plan tangent en* N_1, *on mènera une parallèle par sa projection n_1 à la direction* Pn *jusqu'à sa rencontre avec* GP, *et le point* P_1 *d'intersection appartiendra à la trace horizontale du plan tangent cherché.*

16. Nous pourrions maintenant compléter l'étude des plans aux axoïdes variants par diverses remarques intéressantes au point de vue géométrique, mais nous nous bornerons à énoncer les suivantes :

1° *Toutes les tangentes des courbes d'intersection d'un* *système de variants par un cône variant étant parallèles, toutes les courbes ainsi déterminées sont homothétiques par rapport au sommet du cône.*

2° *Tous les plans variants aux points correspondants déterminés par une génératrice conique se coupent suivant une même droite, et ainsi leurs traces forment un système rayonnant. On obtiendra le centre en menant par* G *une parallèle à* nQ *et en la prolongeant jusqu'à sa rencontre avec la trace du plan tangent au conoïde en* N.

17. Revenant à notre objet essentiel, nous savons que deux surfaces gauches se raccordent quand elles ont deux plans tangents communs en deux points d'une génératrice, ainsi que la même surface directrice. Donc, si nous définissons une surface gauche par deux courbes et un plan directeur adopté pour plan de projection; comme nous savons en outre qu'un des plans tangents sera perpendiculaire au plan de projection, si le point de contact de ce plan était connu, un conoïde droit ayant une des deux courbes pour directrice, même plan directeur et pour axe la perpendiculaire au plan issue de ce point de contact, serait de raccordement, la deuxième directrice serait donc tangente au conoïde au point où elle coupe la génératrice commune. Or il résulte du n° 15 que, lorsque l'on connaît deux plâns tangents sur une génératrice d'un conoïde droit, on peut toujours mener une droite QQ_1 passant par le pied de l'axe. En appliquant cette construction dans le cas présent, on pourra donc déterminer le pied de l'axe du conoïde, c'est-à-dire le point du contour apparent de la surface gauche, projection du point de contact du plan normal au plan tangent à l'infini situé sur la génératrice considérée.

L'analogie entre la méthode particulière actuellement et la méthode générale ci-dessus exposées est absolue. A ce point de vue on peut considérer, comme un annexe du théorème du n° 14, l'énoncé suivant :

Une surface gauche à plan directeur étant donnée et celui-ci choisi comme plan de projection, si l'on projette les points de contact M *et* M_1 *de deux plans tangents sur le plan directeur, après avoir déterminé les traces sur ce plan de ces deux plans tangents, et si par* m *et* m_1 *leurs projections respectives,* *on mène deux droites parallèles et de direction arbitraire, prolongées jusqu'à leur rencontre en* I *et* I_1 *avec les traces, le point où la droite* II_1 *coupe la droite* mm_1 *est la projection du point de contact du plan tangent normal au plan directeur, c'est par conséquent le plan central.*

18. Si, au lieu d'une surface gauche à plan directeur, on avait, sur une surface gauche quelconque, une génératrice parallèle au plan de projection, la construction s'appliquerait à condition de s'être assuré à l'avance que le plan tangent est parallèle au plan horizontal. Lorsque la surface directrice sera connue, l'ambiguïté n'existera pas, mais il n'en sera plus de même si la position de la génératrice est définie par trois directrices, par exemple. Or la construction précédente permet de reconnaître le parallélisme au plan horizontal du plan tangent à l'infini lorsqu'il existe.

En effet, si l'axoïde défini ci-dessus se raccorde effectivement, ce qui n'a lieu que quand le plan tangent à l'infini est parallèle au plan horizontal, la troisième directrice a sa tangente comprise dans le plan tangent à l'axoïde en son point d'intersection avec la génératrice et, en particulier, la trace de cette droite appartient à la trace de ce plan. La construction toujours facile de l'axoïde donnera donc immédiatement la solution.

19. Les constructions relatives au conoïde permettent de calculer facilement le paramètre de distribution sur la génératrice d'une surface gauche.

Nous remarquerons en effet que, pouvant toujours construire un conoïde de raccordement à une surface gauche le long d'une de ses génératrices, il suffit de faire l'étude sur un conoïde.

Soient donc N et N_1 deux points d'un conoïde appartenant à la génératrice NB, en lesquels nous connaissons le plan tangent à la surface. Nous nous donnons l'axe et dans l'établissement des lignes auxiliaires nI, IG qui, d'après les constructions du n° **15**, servent à déterminer les plans tangents, nous supposons que la droite mobile nI est normale au plan axial de la génératrice NB. La droite fixe GI est ainsi la diagonale d'un rectangle nIRG, que nous pouvons construire, et si nous joignons RB, l'angle GBR $= \alpha$ sera l'angle plan du dièdre formé par le plan tangent à la surface en N avec le plan axial choisi pour plan origine. Une construction analogue permettra de déterminer l'angle plan $GBR_1 = \alpha_1$ du plan tangent en N_1 avec le plan axial.

Ceci posé, on aura évidemment

$$\frac{\tang \alpha}{\tang \alpha_1} = \frac{nI}{n_1 I_1} = \frac{a}{a_1},$$

en posant $a = nG$ et $a_1 = n_1 G$ et en convenant de considérer ces longueurs comme positives ou négatives, suivant le sens dans lequel elles sont portées à partir du point G.

Appelons maintenant Δ la distance à l'origine du point de contact de la tangente pour laquelle $\alpha_1 = 45°$ et par suite $\tang \alpha_1 = 1$; on aura l'expression bien connue

$$\tang \alpha = \frac{a}{\Delta}.$$

20. Sans nous arrêter à discuter cette formule, nous nous proposerons maintenant cette question :

Connaissant trois plans tangents à une surface gauche en trois points d'une génératrice, déterminer la position du point central.

Soient :

M, M_1, M_2 ces trois points énumérés dans leur ordre de succession sur la génératrice considérée ; on se donne

$$MM_1 = d_1,$$
$$MM_2 = d_2;$$

δ_1 l'angle des plans tangents en M et M_1 ;

δ_2 l'angle des plans tangents en M et M_2.

Désignons enfin par x la distance du point M au point central, par Δ le paramètre de distribution et enfin par δ l'angle du plan tangent en M avec le plan central.

On pourra écrire

$$\tang \delta = \frac{x}{\Delta},$$

$$\tang(\delta + \delta_1) = \frac{x + d_1}{\Delta},$$

$$\tang(\delta + \delta_2) = \frac{x + d_2}{\Delta};$$

de ces relations on tire

$$\operatorname{tang}\delta_1 = \frac{d_1 \times \Delta}{\Delta^2 + x(x + d_1)},$$

ou encore

(1) $$\Delta^2 + x(x + d_1) = d_1 \cot\delta_1 \times \Delta,$$

$$\operatorname{tang}\delta_2 = \frac{d_2 \times \Delta}{\Delta^2 + x(x + d_2)},$$

ou encore

(2) $$\Delta^2 + x(x + d_2) = d_2 \cot d_2 \times \Delta;$$

retranchant (1) de (2) membre à membre, on obtient finalement, en divisant le résultat par Δ,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{x}{\Delta} = \frac{d_2 \cot\delta_2 - d_1 \cot\delta_1}{d_2 - d_1},$$

une construction graphique permettant de construire tang δ, cet angle sera par cela même déterminé, et, une fois connu, le plan central pourra être construit à son tour.

21. Cette détermination achève de nous permettre la construction du plan tangent aux surfaces gauches dans le seul cas où nous n'avions pas pu le résoudre sans un changement de plan de projection : c'est, on se le rappelle, dans l'hypothèse où, la génératrice considérée étant parallèle au plan de projection et déterminée de position par trois directrices quelconques, on a reconnu que son plan tangent à l'infini n'est pas parallèle au plan de projection, sans que pourtant sa position soit connue. Une fois δ déterminé, en effet, une rotation des trois plans tangents autour de la génératrice, égale à l'angle du plan central avec le plan normal au plan horizontal, nous ramènera à la construction du conoïde et nous n'aurons plus qu'à replacer les résultats dans leur position réelle par une rotation égale en sens inverse.

Les considérations qui précèdent ne sont pas les seuls résultats qu'on puisse tirer de l'étude des surfaces variantes ; nous espérons le montrer dans une prochaine Communication.