

BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

Détermination des nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 100-103.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__100_1

© Bulletin de la S. M. F., 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Détermination des nombres de Bernoulli; par M. DE PRESLE.

(Séance du 6 juin 1886.)

1. *Exposé de la question.* — Les nombres de Bernoulli B sont définis par la relation

$$\frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 = B_1 \frac{x^2}{1.2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots - (-1)^n B_n \frac{x^{2n}}{1.2\dots(2n)} \pm \dots$$

La valeur de $\cot x$ est

$$\cot x = i \frac{e^{2xi} + 1}{e^{2xi} - 1}$$

et, en développant le second membre à l'aide de la relation précédente,

$$\cot x = \frac{1}{x} - B_1 \frac{2^2 x}{1.2} + B_2 \frac{2^4 x^3}{1.2.3.4} - \dots - (-1)^n B_n \frac{2^{2n} x^{2n-1}}{1.2\dots(2n)} \pm \dots;$$

si nous désignons par C_n le coefficient de x^{2n-1} , nous aurons

$$C_n = (-1)^n \frac{2^{2n}}{1 \cdot 2 \dots (2n)} B_n, \quad B_n = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \dots (2n)}{2^{2n}} C_n.$$

L'expression de la tangente se déduit de celle de la cotangente par la relation

$$\text{tang } x = \cot x - 2 \cot 2x;$$

on aura donc, pour le coefficient E_n de x^{2n-1} , dans $\text{tang } x$,

$$E_n = -(2^{2n} - 1) C_n$$

et, par suite,

$$E_n = (-1)^{n+1} \frac{(2^{2n} - 1) 2^{2n}}{1 \cdot 2 \dots (2n)} B_n, \quad B_n = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots (2n)}{(2^{2n} - 1) 2^{2n}} E_n;$$

si donc nous connaissons le développement de $\text{tang } x$, nous déduirions de la dernière égalité la valeur de B_n .

2. Développement de la tangente en série entière. — Nous allons d'abord nous proposer la détermination des dérivées successives de $\text{tang } x$. Soit

$$\varphi(x) = a_n \cos^{-2n} x;$$

nous aurons

$$\varphi'(x) = 2n a_n \cos^{-(2n+1)} x \sin x,$$

$$\varphi''(x) = 2n(2n+1) a_n \cos^{-2(n+1)} x \sin^2 x + 2n a_n \cos^{-2n} x$$

ou bien

$$\varphi''(x) = 2n(2n+1) a_n \cos^{-2(n+1)} x - 4n^2 a_n \cos^{-2n} x.$$

La dérivée de $\text{tang } x$ étant $\cos^{-2} x$, de la valeur de $\varphi''(x)$, on déduira les expressions successives des dérivées impaires de $\text{tang } x$:

$$D_1 \text{ tang } x = 1 \cos^{-2} x,$$

$$D_3 \text{ tang } x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cos^{-4} x - 1 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \cdot \cos^{-2} x,$$

$$D_5 \text{ tang } x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos^{-6} x - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 (1^2 + 2^2) \cos^{-4} x + 12^4 \cdot 1^4 \cdot \cos^{-2} x,$$

$$D_7 \text{ tang } x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cos^{-8} x - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^2 (1^2 + 2^2 + 3^2) \cos^{-6} x + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4 (1^4 + 2^4 + 1^2 2^2) \cos^{-4} x - 1 \cdot 2^6 \cdot 1^6 \cos^{-2} x,$$

$$D_9 \text{ tang } x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cos^{-10} x - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \cos^{-8} x + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4 (1^4 + 2^4 + 3^4 + 1^2 2^2 + 2^2 3^2 + 3^2 1^2) \cos^{-6} x - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^6 (1^6 + 2^6 + 1^4 2^2 + 1^2 2^4) \cos^{-4} x + 1 \cdot 2^8 \cdot 1^8 \cos^{-2} x.$$

Désignons par $S_1^q(z^2)^r$ la somme des produits obtenus en prenant les nombres $1^2, 2^2, 3^2, \dots, q^2$ et, en formant avec eux tous les produits possibles de degré $2r$ avec répétition, nous apercevons la loi de formation suivante :

$$\begin{aligned} D_{2n+1} \operatorname{tang} x &= 1.2 \dots (2n+1) \cos^{-2(n+1)} x \\ &\quad - 1.2 \dots (2n-1) 2^2 S_1^n(z^2)^1 \cos^{-2n} x \\ &\quad + 1.2 \dots (2n-3) 2^4 S_1^{n-1}(z^2)^2 \cos^{-2(n-1)} x - \dots \\ &\quad + (-1)^p 1.2 \dots [2(n-p)+1] 2^{2p} S_1^{n-p}(z^2)^p \cos^{-2(n-p+1)} x \\ &\quad + (-1)^{p+1} 1.2 \dots [2(n-p)-1] 2^{2(p+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \cos^{-2(n-p)} x \pm \dots \end{aligned}$$

Supposons cette loi vraie pour $D_{2n+1} \operatorname{tang} x$, elle le sera encore pour $D_{2n+3} \operatorname{tang} x$; en effet :

Dans $D_{2n+3} \operatorname{tang} x$, le coefficient de $\cos^{-2(n-p+1)} x$ sera

$$\begin{aligned} &(-1)^{p+1} 2(n-p)[2(n-p)+1].1.2 \dots [2(n-p)-1] 2^{2(p+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \\ &\quad - (-1)^p 2^2(n-p+1)^2 1.2 \dots [2(n-p)+1] 2^{2p} S_1^{n-p+1}(z^2)^p \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &(-1)^{p+1} 1.2 \dots [2(n-p)+1] 2^{2(p+1)} [S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \\ &\quad + (n-p+1)^2 S_1^{n-p+1}(z^2)^p] \end{aligned}$$

ou encore

$$(-1)^{p+1} 1.2 \dots \{2[(n+1)-p]-1\} 2^{2(p+1)} S_1^{n+1-p}(z^2)^{p+1},$$

car on a

$$S_1^q(z^2)^r = S_1^{q-1}(z^2)^r + q^2 S_1^q(z^2)^{r-1};$$

la loi est donc générale.

3. *Expression des nombres de Bernoulli.* — Dans l'expression de $D_{2n+1} \operatorname{tang} x$ supposons x nul; nous avons

$$\begin{aligned} &1.2 \dots (2n+1) - 1.2 \dots (2n-1) 2^2 S_1^n(z^2)^1 + \dots \\ &\quad + (-1)^{p+1} 1.2 \dots [2(n-p)-1] 2^{2(p+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1}. \end{aligned}$$

Cette expression, divisée par $1.2 \dots (2n+1)$, est le coefficient de x^{2n+1} dans le développement de $\operatorname{tang} x$; nous avons donc

$$\begin{aligned} E_n &= 1 - \frac{2^2}{2n(2n+1)} S_1^n(z^2)^1 + \dots \\ &\quad + (-1)^{p+1} \frac{2^{2(p+1)}}{2(n-p)[2(n-p)+1] \dots (2n+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \pm \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{2^{2n}}{1.2 \dots (2n+1)} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
 B_n = & (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots (2n)}{(2^{2n} - 1) 2^{2n}} \left[1 - \frac{2^2}{2n(2n+1)} S_1^n (2^2)^1 + \dots \right. \\
 & + (-1)^{p+1} \frac{2^{2(p+1)}}{2(n-p)[2(n+p)+1] \dots (2n+1)} S_1^{n-p} (2^2)^{p+1} \pm \dots \\
 & \left. + (-1)^n \frac{2^{2n}}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \right].
 \end{aligned}$$