BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 131-135.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__131_1>

Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques; par M. de Presle.

(Séance du 7 juillet 1886.)

1. *Expression des fonctions elliptiques en dérivées logarithmiques de sommes de fonctions elliptiques.* — Prenons les relations

$$\mathrm{D}\,\mathrm{sn}\,z = \mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{cn}\,z = -\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}\,z, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{dn}\,z = -k^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z;$$

ajoutons-les deux à deux, après avoir multiplié l'une d'elles par l'une des indéterminées α, β, γ,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,\mathrm{cn}\,z + \alpha\,\mathrm{D}\,\mathrm{dn}\,z &= \mathrm{sn}\,z(-\mathrm{dn}\,z - \alpha\,k^2\mathrm{cn}\,z),\\
\mathrm{D}\,\mathrm{dn}\,z + \beta\,\mathrm{D}\,\mathrm{sn}\,z &= \mathrm{cn}\,z(-k^2\mathrm{sn}\,z + \beta\,\mathrm{dn}\,z),\\
\mathrm{D}\,\mathrm{sn}\,z + \gamma\,\mathrm{D}\,\mathrm{cn}\,z &= \mathrm{dn}\,z(\mathrm{cn}\,z - \gamma\,\mathrm{sn}\,z).
\end{aligned}$$

Déterminons α, β, γ de manière que les premiers membres soient, à un facteur constant près, les dérivées des seconds facteurs des deuxièmes membres

$$\frac{1}{-\alpha k^2} = \frac{\alpha}{-1}, \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{-k^2}, \qquad \frac{1}{-\gamma} = \frac{\gamma}{1};$$

d'où

$$\alpha = \pm\frac{1}{k}, \qquad \beta = \pm ik, \qquad \gamma = +i;$$

on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,\mathrm{dn}\,z \mp k\mathrm{D}\,\mathrm{cn}\,z &= \pm\ k\,\mathrm{sn}\,z(\mathrm{dn}\,z \mp k\,\mathrm{cn}\,z),\\
\mathrm{D}\,\mathrm{dn}\,z \pm ik\mathrm{D}\,\mathrm{sn}\,z &= \pm\, ik\,\mathrm{cn}\,z(\mathrm{dn}\,z \pm ik\,\mathrm{sn}\,z),\\
\mathrm{D}\,\mathrm{cn}\,z \pm\ i\mathrm{D}\,\mathrm{sn}\,z &= \pm\, i\,\mathrm{dn}\,z(\mathrm{cn}\,z \pm i\,\mathrm{sn}\,z),
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
\pm k\ \mathrm{sn}\,z &= \mathrm{D}\log(\mathrm{dn}\,z \mp k\,\mathrm{cn}\,z),\\
\pm ik\,\mathrm{cn}\,z &= \mathrm{D}\log(\mathrm{dn}\,z \pm ik\,\mathrm{sn}\,z),\\
\pm i\ \mathrm{dn}\,z &= \mathrm{D}\log(\mathrm{cn}\,z \pm i\,\mathrm{sn}\,z).
\end{aligned}$$

2. *Transformation des sommes précédentes en produits.* — Prenons les relations

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,z},\\
\mathrm{cn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{i\,\mathrm{dn}\,z}{k\,\mathrm{sn}\,z},\\
\mathrm{dn}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{ik\,\mathrm{cn}\,z}{k\,\mathrm{sn}\,z}
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{sn}\,a = \frac{2\,\mathrm{sn}\frac{a}{2}\,\mathrm{cn}\frac{a}{2}\,\mathrm{dn}\frac{a}{2}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{a}{2}},$$

$$\mathrm{cn}\,a = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{a}{2} - \mathrm{sn}^2\frac{a}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{a}{2}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{a}{2}},$$

$$\mathrm{dn}\,a = \frac{\mathrm{dn}^2\frac{a}{2} - k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{a}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{a}{2}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{a}{2}}.$$

Remplaçons a par $z+\frac{\omega'}{2}$ dans les dernières; il vient, en vertu des premières,

$$\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,z} = \frac{2\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-\frac{i\,\mathrm{dn}\,z}{k\,\mathrm{sn}\,z}=\frac{\mathrm{cn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)-\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-\frac{ik\,\mathrm{cn}\,z}{k\,\mathrm{sn}\,z}=\frac{\mathrm{dn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)-k^2\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{cn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

ou bien

$$k\,\mathrm{sn}\,z=\frac{1-k^2\mathrm{sn}^4\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{2\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-i\,\mathrm{dn}\,z=\frac{\mathrm{cn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)-\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{2\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-ik\,\mathrm{cn}\,z=\frac{\mathrm{dn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{cn}^2\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{2\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

ce qui donne, pour les valeurs des sommes des fonctions elliptiques,

$$\mathrm{dn}\,z-k\,\mathrm{cn}\,z=-\frac{ik'^2\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\mathrm{dn}\,z+ik\,\mathrm{sn}\,z=\frac{i\,\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\mathrm{cn}\,z+i\,\mathrm{sn}\,z=\frac{i\,\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{k\,\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}$$

et

$$\mathrm{dn}\,z+k\,\mathrm{cn}\,z=\frac{i\,\mathrm{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{\mathrm{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\operatorname{dn} z - ik'\operatorname{sn} z = -\frac{i\operatorname{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\operatorname{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\operatorname{cn} z - i\operatorname{sn} z = -\frac{ki\operatorname{sn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)\operatorname{cn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{z}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)};$$

les trois dernières relations donnent lieu aux mêmes calculs que les trois précédentes; nous ne nous occuperons que de celles-ci.

3. *Dérivées logarithmiques des fonctions elliptiques.* — Les dérivées logarithmiques des fonctions elliptiques ont pour expression

$$\mathrm{D}\log\operatorname{sn} z = \frac{\pi i}{\omega}\frac{e^{\frac{\pi z i}{\omega}}+e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}}{e^{\frac{\pi z i}{\omega}}-e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}} + \frac{2\pi i}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{n+1}\left(e^{\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}}-e^{-\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1+q^{n+1}},$$

$$\mathrm{D}\log\operatorname{cn} z = \frac{\pi i}{\omega}\frac{e^{\frac{\pi z i}{\omega}}-e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}}{e^{\frac{\pi z i}{\omega}}+e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}} + \frac{2\pi i}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{n+1}\left(e^{\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}}-e^{-\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1+(-1)^{n+1}q^{n+1}},$$

$$\mathrm{D}\log\operatorname{dn} z = \frac{4\pi i}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}\left(e^{\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}}-e^{-\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1-q^{2(2n+1)}}.$$

(Ces formules se trouvent dans les *Fundamenta nova* de Jacobi et dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet, n° 297, p. 482.)

4. *Expression des fonctions elliptiques.* — Des formules précédentes, on déduit

$$\mathrm{D}\log\operatorname{sn} z - \mathrm{D}\log\operatorname{cn} z - \mathrm{D}\log\operatorname{dn} z$$
$$= \frac{4\pi i}{\omega}\frac{1}{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}-e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}\left(e^{\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}}-e^{-\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1-q^{2n+1}},$$

$\mathrm{D}\log\mathrm{cn}\,z - \mathrm{D}\log\mathrm{dn}\,z - \mathrm{D}\log\mathrm{sn}\,z$

$$= -\frac{4\pi i}{\omega}\,\frac{1}{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}\left(e^{\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1+q^{2n+1}},$$

$\mathrm{D}\log\mathrm{dn}\,z - \mathrm{D}\log\mathrm{sn}\,z - \mathrm{D}\log\mathrm{cn}\,z$

$$= -\frac{2\pi i}{\omega}\,\frac{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}}{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{2(n+1)}\left(e^{\frac{4(n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{4(n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1+q^{2(n+1)}}.$$

Remplaçons z par $\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}$, q étant égal à $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, introduisons les facteurs constants $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{ik}$, $\frac{1}{i}$ qui sont les inverses des coefficients de $\mathrm{sn}\,z$, $\mathrm{cn}\,z$, $\mathrm{dn}\,z$ dans les deuxièmes équations du premier paragraphe, et multiplions par la dérivée de $\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}$ qui est $\frac{1}{2}$; nous aurons, pour les expressions cherchées,

$$\mathrm{sn}\,z = -\frac{2\pi i\sqrt{q}}{k\omega}\sum_0^\infty \frac{q^n\left(e^{\frac{(2n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{(2n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1-q^{2n+1}},$$

$$\mathrm{cn}\,z = \frac{2\pi\sqrt{q}}{k\omega}\sum_0^\infty \frac{q^n\left(e^{\frac{(2n+1)\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{(2n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1+q^{2n+1}},$$

$$\mathrm{dn}\,z = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{n+1}\left(e^{\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}}\right)}{1+q^{2(n+1)}}$$

ou

$$\mathrm{sn}\,z = \frac{4\pi\sqrt{q}}{k\omega}\sum_0^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n+1}}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{\omega},$$

$$\mathrm{cn}\,z = \frac{4\pi\sqrt{q}}{k\omega}\sum_0^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n+1}}\cos\frac{(2n+1)\pi z}{\omega},$$

$$\mathrm{dn}\,z = \frac{\pi}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sum_0^\infty \frac{q^{n+1}}{1+q^{2(n+1)}}\cos\frac{2(n+1)\pi z}{\omega}.$$