G. FOURET

Sur un mode de transformation des déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 146-151.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__146_1>

Sur un mode de transformation des déterminants;

par M. G. Fouret.

(Séance du 17 novembre 1886.)

Avant d'arriver à la transformation qui fait l'objet de cette Note, nous allons démontrer trois théorèmes préliminaires, qui nous seront utiles et qui présentent d'ailleurs quelque intérêt en eux-mêmes.

Théorème I. — *Le déterminant du $n^{ième}$ ordre* (1)

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n,$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité, sauf les $n - 1$ derniers éléments de la diagonale principale, qui sont nuls, est égal à $(-1)^{n-1}$.

En effet, en retranchant la seconde colonne de la première, on obtient

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = -A_{n-1}.$$

---

(1) Nous indiquerons, dans ce qui va suivre, l'ordre de chaque déterminant par un indice placé en bas et à la droite de ce déterminant.

On a, par suite, la série d'égalités

$$\begin{aligned} A_n &= - A_{n-1}, \\ A_{n-1} &= - A_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_3 &= - A_2; \end{aligned}$$

d'ailleurs

$$A =_2 - 1.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on en conclut

$$A_n = (-1)^{n-1}.$$

Théorème II. — *Le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre*

$$B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n,$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont nuls, est égal à $(n-1)(-1)^{n-1}$.

En effet, on obtient, en ajoutant les $n-1$ dernières colonnes à la première,

$$B_n = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots\ldots & . & . & \ldots & . \\ n-1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}_n = (n-1) A_n.$$

Donc, en vertu du théorème précédent,

$$B_n = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

Théorème III. — *Le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre*

$$C_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & 1 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 \end{vmatrix}_n,$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont égaux à -1, *a pour valeur* $(n-2)(-2)^{n-1}$.

En effet, en ajoutant la première colonne à toutes les colonnes suivantes, on obtient

$$C_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 0 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 2 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = -2^{n-1}B_{n-1};$$

d'où l'on conclut, en vertu du théorème II,

$$C_n = -(n-2)(-1)^{n-2}2^{n-1} = (n-2)(-2)^{n-1}.$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, qui pourra servir, dans certains cas, à transformer un déterminant.

Théorème IV. — *La valeur d'un déterminant est multipliée par* $(n-2)2^{n-1}$, *et changée de signe, lorsqu'on transforme* n *lignes parallèles de ce déterminant, en retranchant des éléments de chacune d'elles les éléments correspondants des* $n-1$ *autres.*

Soit

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & k & l & \alpha & \dots & \lambda \\ a' & b' & c' & \dots & k' & l' & \alpha' & \dots & \lambda' \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ a'' & b'' & c'' & \dots & k'' & l'' & \alpha'' & \dots & \lambda'' \end{vmatrix}_m$$

un déterminant d'un ordre m quelconque, dont nous mettons en évidence les n premières colonnes, en les écrivant en caractères italiques. En appliquant aux n premières colonnes de ce déterminant D la transformation spécifiée dans l'énoncé du théorème IV, on obtient le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c-\dots-l & -a+b-c-\dots-l & \dots & -a-b-c-\dots+l & \alpha\dots\lambda \\ a'-b'-c'-\dots-l' & -a'+b'-c'-\dots-l' & \dots & -a'-b'-c'-\dots+l' & \alpha'\dots\lambda' \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a''-b''-c''-\dots-l'' & -a''+b''-c''-\dots-l'' & \dots & -a''-b''-c''-\dots+l'' & \alpha''\dots\lambda'' \end{vmatrix}_m.$$

Or ce déterminant Δ est le produit, effectué par lignes horizontales, du déterminant D et du déterminant

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -1 & -1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_m .$$

On a d'ailleurs, en réduisant et s'appuyant sur le théorème III,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_n = (-1)^n C_n = -(n-2)2^{n-1};$$

par conséquent

$$(1) \qquad \Delta = CD = -(n-2)2^{n-1}.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré pour le cas où les n lignes parallèles sur lesquelles on opère occupent les n premiers rangs. Mais il est bien clair que, dans le cas général, on peut toujours amener aux premiers rangs les n lignes parallèles de D que l'on considère, et les n lignes correspondantes de Δ; car on ne fait ainsi que multiplier ces deux déterminants par la même puissance de -1. La relation (1) s'appliquant, comme nous l'avons démontré, aux déterminants D et Δ ainsi modifiés, s'applique, par conséquent, aussi à ces déterminants non altérés. La démonstration du théorème IV est donc complète.

Autre démonstration. — Le même théorème peut se démontrer d'une manière moins élégante, mais plus directe, sans s'appuyer sur les trois théorèmes préliminaires et sur la multiplication des déterminants. Pour abréger l'écriture, nous représenterons les déterminants D et Δ par leur première ligne horizontale. Les transformations que nous ferons subir aux éléments de cette première ligne horizontale seront supposées appliquées aux éléments correspondants de toutes les autres. En vertu d'une remarque déjà faite, il suffira d'ailleurs de faire la démonstration sur les n premières colonnes.

En écrivant Δ sous la forme

$$\Delta = | \; a-b-c-\ldots-k-l \quad b-c-\ldots-l-a \quad \ldots \quad l-a-b-\ldots-k \quad \ldots \; |,$$

on obtient successivement, en ajoutant la première colonne aux $n-1$ suivantes,

$$\begin{aligned}\Delta &= | \; a-b-c\ldots-k-l \quad -2(c+d+\ldots+l) \quad \ldots \quad -2(b+c+\ldots+k) \quad \ldots \; | \\ &= (-1)^{n-1}2^{n-1} | \; a-b-c-\ldots-k-l \quad c+d+\ldots+l \quad \ldots \quad b+c+\ldots+k \quad \ldots \; |;\end{aligned}$$

puis, en ajoutant encore la première colonne aux $n-1$ suivantes dans le déterminant ainsi transformé,

$$\Delta = (-1)^{n-1}2^{n-1} | \; a-b-c-\ldots-l \quad a-b \quad a-c \quad \ldots \quad a-l \quad \ldots \; |,$$

en retranchant ensuite de la première colonne les $n-1$ qui la suivent

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^{n-1}2^{n-1} | \; -(n-2)a, \quad a-b, \quad a-c \quad \ldots \quad a-l \quad \ldots \; | \\ &= (-1)^{n-1}(n-2)2^{n-1} | \; -a \quad a-b \quad a-c \quad \ldots \quad a-l \quad \ldots \; |,\end{aligned}$$

en ajoutant enfin la première colonne aux $n-1$ suivantes

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^{n-1}(n-2)2^{n-1} | \; -a \quad -b \quad -c \quad \ldots \quad -l \quad \ldots \; | \\ &= (-1)^{2n-1}(n-2)2^{n-1} | \; a \quad b \quad c \quad \ldots \quad l \quad \ldots \; |,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Delta = -(n-2)2^{n-1}\mathrm{D}.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Avant d'appliquer au déterminant D la transformation qui conduit à Δ, on pourrait changer les signes des éléments d'une ou plusieurs colonnes de D, ou bien encore multiplier les éléments d'une même colonne par un même nombre. On obtiendrait ainsi de nouveaux déterminants dont le rapport au déterminant D s'évaluerait aisément à l'aide du théorème qui vient d'être démontré.

Exemple. — En vertu de cette remarque, on déduit aisément du théorème IV la suite d'identités

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} b+c-a & c+a-b & a+b-c \\ b'+c'-a' & c'+a'-b' & a'+b'-c' \\ b''+c''-a'' & c''+a''-b'' & a''+b''-c'' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} a+b+c & a-b-c & b-a-c \\ a'+b'+c' & a'-b'-c' & b'-a'-c' \\ a''+b''+c'' & a''-b''-c'' & b''-a''-c'' \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} a+b+c & a+b-c & a-b-c \\ a'+b'+c' & a'+b'-c' & a'-b'-c' \\ a''+b''+c'' & a''+b''-c'' & a''-b''-c'' \end{vmatrix}$$

et, plus généralement,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{4\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} b\beta+c\gamma-a\alpha & c\gamma+a\alpha-b\beta & a\alpha+b\beta-c\gamma \\ b'\beta+c'\gamma-a'\alpha & c'\gamma+a'\alpha-b'\beta & a'\alpha+b'\beta-c'\gamma \\ b''\beta+c''\gamma-a''\alpha & c''\gamma+a''\alpha-b''\beta & a''\alpha+b''\beta-c''\gamma \end{vmatrix},$$

α, β, γ désignant des nombres quelconques, positifs ou négatifs.