BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DE PRESLE

Multiplication de deux déterminants de même degré

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 157-158.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__157_0>

Multiplication de deux déterminants de même degré;
par M. A. de Presle.

(Séance du 1er décembre 1886.)

Soient les déterminants

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nous avons

$$AB = \Sigma A(\pm b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}),$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ étant une combinaison des nombres 1, 2, ..., n, de sorte que $\pm b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}$ est l'expression générale d'un terme du déterminant B.

En désignant par $[a]_p$ la colonne $\begin{Bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \dots \\ a_{np} \end{Bmatrix}$, on a

$$A = \pm \mid [a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n} \mid,$$

de sorte que

$$AB = \Sigma \pm \mid [a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n} \mid b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n};$$

mais nous pouvons supprimer le double signe; en effet, d'une part, le terme $b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}$ du déterminant B est affecté du signe plus ou du signe moins, selon que l'on passe de ce terme au terme principal par un nombre pair ou par un nombre impair d'échanges deux à deux des indices p; mais, d'autre part, pour être égal au déterminant A, le déterminant $\mid [a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n} \mid$ doit être affecté du signe + ou du signe —, selon que l'on passe de ce déterminant au déterminant A par un nombre pair ou par un nombre impair d'échanges deux à deux des indices p; nous pouvons donc écrire

$$AB = \Sigma \; [a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n} \mid b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}.$$

Cela posé, pour multiplier le déterminant du second membre par $b_{1p_1} b_{2p_2} \ldots b_{np_n}$, il suffit de multiplier la première colonne par b_{1p_1}, la seconde par b_{2p_2}, et ainsi de suite; donc

$$AB = \Sigma \,|\, [a]_{p_1} b_{1p_1} \quad [a]_{p_2} b_{2p_2} \quad \ldots \quad [a]_{p_n} b_{np_n} \,|.$$

Pour former cette somme, considérons la Tableau formé de n groupes de n colonnes

$$[a]_1 b_{11},\ [a]_2 b_{12},\ \ldots,\ [a]_n b_{1n};\ \ [a]_1 b_{21},\ [a]_2 b_{22},\ \ldots,\ [a]_n b_{2n};\ \ \ldots;\ \ [a]_1 b_{n1},\ [a]_2 b_{n2},\ \ldots,\ [a]_n b_{nn}.$$

Il faudra former tous les déterminants partiels possibles avec une colonne de chaque groupe, mais en évitant de prendre deux colonnes occupant le même rang dans leur groupe.

Cette dernière restriction est inutile; car, en ne la faisant pas, on introduit seulement dans la somme des déterminants partiels nuls comme ayant deux colonnes formées d'éléments proportionnels; donc tous les déterminants partiels, dont l'addition constitue AB, ont leur somme égale à un déterminant unique de même degré, et l'on a

$$AB = |[a]_1 b_{11} + [a]_2 b_{12} + \ldots + [a]_n b_{1n} \,|\, [a]_1 b_{21} + [a]_2 b_{22} + \ldots + [a]_n b_{2n} \,| \ldots |\, [a]_1 b_{n1} + [a]_2 b_{n2} + \ldots + [a]_n b_{nn} |.$$

Un terme c_{pq} de AB a pour expression

$$c_{pq} = a_{1p} b_{1q} + a_{2p} b_{2q} + \ldots + a_{np} b_{nq};$$

d'où la règle connue pour avoir le terme général du produit de deux déterminants.