Bulletin de la S. M. F.

M. Weill

# Question de probabilité

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 14 (1886), p. 158-159.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__158_1>

## *Question de probabilité;* par M. Weill.

(Séance du 1er décembre 1886.)

Considérons $k$ événements différents, également probables, et $p$ épreuves consécutives; cherchons la probabilité pour qu'un des événements considérés et désigné se produise au moins deux fois de suite dans l'ensemble des $p$ épreuves.

Représentons par des lettres différentes les $k$ événements, et soient $a$ l'événement que l'on considère, $X(p)$ la probabilité cherchée. Le nombre de cas possibles étant $k^p$, le nombre de cas favorables est $k^p\,X(p)$.

Ce nombre est, d'autre part, égal à $k$ fois le nombre de cas favorables présentés par $(p-1)$ événements consécutifs, c'est-à-dire à

$$k^p X(p-1),$$

augmenté du nombre des cas défavorables présentés par les $(p-1)$ événements, mais terminés par l'événement $a$. Ce deuxième nombre est égal à la différence entre le nombre des cas défavorables et le nombre de ceux non terminés par $a$, c'est-à-dire à

$$k^{p-1}[1-X(p-1)]-k^{p-2}(k-1)[1-X(p-2)].$$

On a donc la formule de récurrence

$$k^p X(p)=k^p X(p-1)+k^{p-1}[1-X(p-1)]-k^{p-2}(k-1)[1-X(p-2)]$$

ou

$$X(p)=\frac{k-1}{k}X(p-1)+\frac{k-1}{k^2}X(p-2)+\frac{1}{k^2}.$$

L'expression de $X(p)$ est de la forme

$$C\alpha^p+C'\beta^p-\frac{1}{k^2-1},$$

$\alpha$, $\beta$, $C$, $C'$ étant des constantes que l'on sait déterminer par la méthode de Lagrange.

On peut raisonner autrement : supposons, en représentant les $k$ événements par des lettres, que $\lambda$ lettres précèdent le premier groupe de deux lettres $a$ consécutives que l'on rencontre; le nombre de cas présentés par ces $\lambda$ lettres est égal à

$$k^{\lambda-1}[1-X(\lambda-1)](k-1).$$

Le nombre total des cas favorables est donc égal à

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2}(k-1)k^{\lambda-1}[1-X(\lambda-1)].$$

En égalant cette somme à $X(p)k^p$, on aura une formule de récurrence permettant de calculer $X(p)$. En égalant les résultats de ces deux méthodes, on aura une identité algébrique.