BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DEMARTRES

Sur un point de la théorie des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 129-133.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__129_1>

Sur un point de la théorie des surfaces; par M. Demartres.

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Dans une Communication précédente (19 janvier 1887), j'ai défini la flexion d'une ligne tracée sur une surface relativement à un plan donné. Je me propose d'établir ici diverses expressions de cet élément, qui, pour un choix particulier du plan de référence, se réduit, comme on le verra, à la torsion géodésique, introduite, par M. Bertrand, dans la théorie générale des surfaces.

Soient

MM′ un élément de courbe tracée sur la surface;
Q, Q′ les plans tangents correspondants;
θ, $\theta + d\theta$ les angles qu'ils font avec le plan de référence fixe P;
dV l'angle des deux plans Q et Q′;
$d\varphi$ l'angle que font les traces des deux plans tangents sur le plan P;
h, $h + dh$ les distances de M et de M′ au plan P.

La flexion de MM′, par rapport à P, est, par définition,

$$f = \frac{dh}{d\varphi}\,\frac{1}{\sin^2\theta}. \tag{1}$$

Or, si nous appelons D la trace sur Q d'un plan parallèle à P et mené par M, on a d'abord

$$dh = \text{MM}' \sin\varepsilon \sin\theta, \tag{2}$$

ε étant l'angle que θ fait avec la direction D′ de la tangente MM′; d'autre part, si ε_1 est l'angle que fait avec D la tangente conjuguée de D′, les trois plans P, Q, Q′ forment un trièdre dans lequel les deux faces $d\varphi$, ε_1 sont opposées aux dièdres $\widehat{Q, Q'}$, $\theta + d\theta$; on aura donc

$$\frac{d\varphi}{\widehat{QQ'}} = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \theta}. \tag{3}$$

Si l'on porte les valeurs (2) et (3) dans l'expression (1), on obtient la première expression de la flexion

$$f = \frac{\text{MM}'}{\widehat{QQ'}} \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1}. \tag{4}$$

La première conséquence à en tirer est la suivante :

La flexion d'un élément MM′ *n'est pas altérée lorsque le plan de référence tourne d'un angle quelconque autour de sa trace sur le plan tangent en* M.

J'appellerai alors *flexion d'une direction* D′, par rapport à une direction D, celle d'un élément de courbe pris sur O′ par rapport à n'importe quel plan parallèle à D, et je le désignerai, pour abréger, par le symbole (OO′).

Le rapport $\frac{\text{MM}'}{\widehat{QQ'}}$ est susceptible de diverses expressions bien connues. M. Bertrand a donné la suivante :

$$\frac{\widehat{QQ'}}{\text{MM}'} = \sqrt{\frac{1}{R_1^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2^2}\sin^2\varphi},$$

où φ est l'inclinaison de MM′ sur la direction principale de courbure $\frac{1}{R_1}$. Substituons cette valeur dans la formule (4) et désignons par ω l'inclinaison de D sur la même direction principale, nous aurons

$$\varepsilon = \omega - \varphi, \qquad \varepsilon_1 = \omega - \varphi_1,$$

$$f = \frac{\pm \sin(\omega - \varphi)}{\sin(\omega - \varphi_1)\sqrt{\frac{1}{R_1^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2^2}\sin^2\varphi}},$$

$$\tang \varphi_1 \tang \varphi = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Éliminons φ, il vient

$$f = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\frac{\cos\omega\cos\varphi}{R_1} + \frac{\sin\omega\sin\varphi}{R_2}} = (\text{DD}'), \tag{5}$$

le signe ayant été déterminé de telle sorte que $d\varphi$ soit positif lorsque la rotation s'effectue de la première direction principale vers la seconde.

On a d'autre part, d'après une formule due à M. Bonnet, en appelant $\frac{1}{R'}$ la courbure normale de MM',

$$\frac{MM'}{\widehat{QQ'}} = R' \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon);$$

d'où cette autre expression

$$(6) \qquad (D, D') = \frac{R' \sin\varepsilon \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\sin\varepsilon_1}.$$

On peut enfin obtenir une expression où figurent les courbures normales $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ relatives aux distances D et D'. Si l'on développe l'équation (5) et qu'on y remplace $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ par les quantités proportionnelles $\sqrt{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}}$, $\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}}$, $\sqrt{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'}}$, $\sqrt{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1}}$, on obtient, après une réduction très simple,

$$(7) \quad (DD') = \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}}{\frac{1}{R'}\sqrt{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}\right)} + \frac{1}{R}\sqrt{\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'}\right)}}.$$

2. Les expressions (4), (5), (6), (7) sont également propres à mettre en évidence un certain nombre de propositions immédiates. Nous les déduirons de la formule (5).

On voit d'abord que, si l'on échange ω et φ, l'expression trouvée change seulement de signe, en d'autres termes $(DD') + (D'D) = 0$. Donc :

Théorème I. — *La flexion de D' par rapport à D est égale et de signe contraire à celle de D par rapport à D'.*

Il suit de là que toute propriété des flexions entraîne une propriété corrélative.

Si l'on fait $\varphi = 0$, on obtient $f = R_1 \tan\omega$; de même, pour $\omega = 0$, $f = -R_1 \tan\varphi$; de là un double théorème que je me dispenserai d'énoncer.

L'équation (5), sous la forme

$$\frac{f}{R_2}\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\omega + \frac{f}{R_1} = 0, \tag{8}$$

donne lieu au théorème suivant :

THÉORÈME II. — *A chaque direction* (D) *en correspond une autre* D′ *bien déterminée, telle que* (DD′) *ait une valeur donnée* f; *cette flexion restant constante, les droites* D *et* D′ *engendrent deux faisceaux homographiques ayant pour rayons doubles les asymptotes de l'indicatrice au point* M.

Si l'on désigne par f, f_1 les flexions de D′ par rapport à deux directions D, D_1 perpendiculaires entre elles, on obtient immédiatement la relation

$$ff_1 + (f+f_1)(R_1 - R_2)\sin\omega\cos\omega + R_1R_2 = 0.$$

De même, l'équation

$$ff_1 + (f+f_1)(R_2 - R_1)\sin\varphi\cos\varphi + R_1R_2 = 0$$

aura lieu entre les deux directions φ, $\frac{\pi}{2}+\varphi$ par rapport à une même direction D.

Supposons $\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\varphi = -1$: l'équation (8) devient

$$-\frac{f}{R_2} + \frac{f}{R_1} = -\cot\varphi - \operatorname{tang}\varphi = \frac{-1}{\sin\varphi\cos\varphi};$$

$$f = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi\cos\varphi;$$

on reconnaît l'expression de la torsion géodésique de la direction MM′; donc :

THÉORÈME III. — *Lorsque deux directions sont rectangulaires, la flexion de l'une par rapport à l'autre a pour valeur absolue la torsion géodésique correspondante.*

Notre égalité générale (DD′) = — (D′D) se réduit ici à la proposition de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux éléments rectangulaires; on peut la considérer comme une généralisation de la proposition en question.

Revenons à la formule (5); donnons à φ deux valeurs φ, φ_1 correspondant à deux diamètres conjugués, c'est-à-dire liés par la relation

$$\tang\varphi \tang\varphi_1 = -\frac{R_2}{R_1}.$$

On aura, en désignant par f, f_1 les flexions correspondantes, la relation suivante, indépendante de ω,

$$ff_1 + RR_1 = 0.$$

On trouve ainsi, par une voie géométrique, l'égalité qui a fait l'objet de la Note citée plus haut; mais on peut maintenant l'énoncer de deux manières, qui correspondent à des théorèmes parfaitement distincts, et dont chacun donne une expression très générale de la courbure totale, savoir :

Théorème IV. — *La courbure totale est égale et de signe contraire au produit des flexions de deux déplacements conjugués, le plan de référence étant le même et d'ailleurs quelconque.*

Théorème V. — *La courbure totale est égale et de signe contraire au produit des flexions d'un même déplacement par rapport à deux plans quelconques coupant le plan tangent suivant deux diamètres conjugués de l'indicatrice.*