Bulletin de la S. M. F.

E. Picard

Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 148-152.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__148_0>

Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables; par M. Émile Picard.

(Séance du 20 avril 1887.)

On sait que les intégrales

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞, satisfont à un système s de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes. Soient ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions; j'ai considéré précédemment (*Annales de l'École Normale,* 1885) les équations

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = v$$

et montré qu'elles donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v, quand $\lambda + b_1 - 1$ et les expressions analogues, ainsi que $2 - \lambda - b_1 - b_2$ et ses analogues, étaient les inverses de nombres entiers. (Je me suis borné dans mon Mémoire au cas de nombres entiers positifs, mais c'est là une restriction inutile.)

J'ai cité dans mon travail deux cas particuliers; j'avais fait précédemment du premier une étude complète, et le second, qui correspond à

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \tfrac{3}{5},$$

nous a donné le premier exemple d'un groupe hyperfuchsien dans lequel le domaine ou *polyèdre* fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite, c'est-à-dire que sa *surface* n'a pas de points communs avec celle de l'hypersphère.

Voici deux autres exemples, où se présente encore cette circonstance remarquable.

Le premier est donné par

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \tfrac{5}{8};$$

on voit que dans ce cas $\lambda + b_1 - 1 = \frac{1}{4}$, ainsi que toutes les combinaisons analogues, puisque les nombres sont égaux. On aura pareillement $2 - \lambda - b_1 - b_2 = \frac{1}{8}$.

Aucun des développements à employer ne contiendra alors de logarithmes et l'on peut en conclure (Mémoire cité) que la surface du polyèdre fondamental n'a aucun point commun avec la surface de l'hypersphère limite.

Le second exemple correspond à

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{5}{9}$$

pour lequel on a

$$\lambda + b_1 - 1 = \frac{1}{9}$$

et

$$2 - \lambda - b_1 - b_2 = \frac{1}{3}.$$

Citons un troisième exemple

$$\lambda = \mu = b_1 = \frac{3}{4}, \qquad b_2 = \frac{1}{4};$$

mais ici nous ne serons plus dans le même cas que pour les exemples précédents ; le polyèdre fondamental du groupe hyperfuchsien aura un certain nombre de points communs avec la surface de l'hypersphère.

Pour ce qui concerne l'étude des fonctions hyperfuchsiennes qui précèdent, un des points les plus importants de la théorie des séries hypergéométriques de deux variables consiste dans le théorème suivant. On peut associer à tout système S, correspondant à une intégrale hypergéométrique, une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, qui ne change pas quand on effectue sur les variables les substitutions du *groupe* du système S. C'est ce que j'ai démontré (*loc. cit.*). Le discriminant de cette forme est, en général, différent de zéro, et, dans les cas qui donnent des fonctions hyperfuchsiennes, la forme est indéfinie et donne la limite de l'espace dans lequel les fonctions sont définies. Ceci posé, je me suis demandé si l'on ne pourrait pas trouver des cas où les conditions relatives aux différences telles que

$$\lambda + b_1 - 1$$

et

$$2 - \lambda - b_1 - b_2$$

seraient vérifiées, et pour lesquels le discriminant de la forme ternaire serait nul. Un exemple d'un pareil cas nous sera donné par

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \tfrac{3}{4}.$$

Ici, comme dans tous les cas où $\lambda + \mu + b_1 + b_2 = 3$, une des intégrales du système S se réduit à une constante; c'est ce que l'on reconnaît de suite, puisque les termes en z disparaissent dans les trois équations.

Cherchons ce que devient dans ce cas la forme quadratique ternaire dont j'ai parlé plus haut. Je vais, à cet effet, appliquer les formules données d'une manière générale dans mon Mémoire. Soit ω_1, ω_2, ω_3 le système fondamental d'intégrales dont je suis parti. Nous écrirons la forme comme il suit

$$\begin{gathered}
A\,\omega_1\omega_1^0 + A'\omega_2\omega_2^0 + A''\omega_3\omega_3^0 + B''\omega_1\omega_2^0 + B''_0\omega_1^0\omega_2 \\
+ B'\omega_1\omega_3^0 + B'_0\omega_1^0\omega_3 + B\,\omega_2\omega_3^0 + B_0\omega_2^0\omega_3,
\end{gathered}$$

ω_i et ω_i^0 désignant évidemment des variables conjuguées, B et B_0 étant des coefficients conjugués.

On a, par l'application des formules générales,

$$A = 1, \qquad A' = 2, \qquad A'' = 1, \qquad B = 1 + i, \qquad B' = -i, \qquad B'' = -(1+i)$$

et l'on voit alors immédiatement que la forme précédente se réduit à

$$\text{norme}[\omega_1 - (1-i)\omega_2 + i\omega_3].$$

La forme de ce résultat si simple était aisée à prévoir; car une combinaison linéaire et homogène de ω_1, ω_2 et ω_3 devant se réduire à une constante, la forme quadratique devait être nécessairement la norme d'une expression linéaire et homogène en ω_1, ω_2 et ω_3. Dans le cas actuel ce sera évidemment $\omega_1 - (1-i)\omega_2 + i\omega_3$ qui se réduira à une constante.

Nous n'avons à considérer que deux des expressions ω, soient ω_1 et ω_3; mais, pour pouvoir appliquer de suite nos formules générales, considérons les quotients

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_1 - (1-i)\omega_2 + i\omega_3}, \qquad v = \frac{\omega_3}{\omega_1 - (1-i)\omega_2 + i\omega_3}.$$

Cherchons ce que deviennent u et v quand on effectue sur les ω les substitutions du groupe du système S. Je me borne à transcrire les substitutions désignées d'une manière générale (*loc. cit.*) par Σ_1, Σ_2, Σ_3 et qui proviennent, y étant laissé constant, de la circulation de x autour des points o, 1 et y.

En appliquant les formules, on aura tout de suite

$$\Sigma_1 \begin{cases} u' = -u, \\ v' = v, \end{cases} \qquad \Sigma_2 \begin{cases} u' = -iv + 1, \\ v' = ui - i, \end{cases} \qquad \Sigma_3 \begin{cases} u' = v + 1, \\ v' = u - 1; \end{cases}$$

je tirerai de ces formules une remarque importante. Une combinaison très simple des trois substitutions précédentes nous donne la substitution

$$(1) \qquad \begin{cases} u' = u - 4i, \\ v' = v, \end{cases}$$

et une seconde combinaison donne sans peine la substitution

$$(2) \qquad \begin{cases} u' = u + 4, \\ v' = v. \end{cases}$$

Ceci posé, revenons à u et v considérées comme fonctions de x et y. Elles restent finies pour toute valeur de x et y, et de plus les conditions relatives à

$$\lambda + b_1 - 1 \qquad \text{et} \qquad 2 - \lambda - b_1 - b_2$$

étant remplies, les deux équations

$$u(x, y) = z, \qquad v(x, y) = t$$

donneront pour x et y des fonctions uniformes de z et t, définies pour toutes valeurs finies des variables complexes z et t.

Quelle sera la nature de ces fonctions uniformes? Les substitutions (1) et (2) nous montrent tout de suite que x et y seront des fonctions uniformes de z, admettant les deux périodes $+4$ et $4i$. La considération des autres substitutions fondamentales du groupe que je n'ai pas écrites nous montrerait de même, ce qui est d'ailleurs évident par raison de symétrie, que x et y sont également doublement périodiques par rapport à la seconde variable t.

Ainsi, dans le cas particulier qui nous occupe, les fonctions hyperfuchsiennes dégénèrent en fonctions uniformes de z et t, *doublement périodiques séparément* par rapport à chacune de ces variables.

M. Goursat avait de son côté rencontré ce cas particulier, comme on peut le voir dans les *Comptes rendus* (28 mars 1887). D'après ce qui précède, l'inversion des équations (3) se ramènera non seulement à des fonctions Θ de deux variables, mais même à des fonctions Θ d'une seule variable.

Il ne serait peut-être pas sans intérêt de rechercher s'il existe des dégénérescences moins particulières que celle qui vient d'être indiquée. Dans notre exemple, la forme quadratique ternaire de discriminant nul se réduit au seul terme UU_0; il n'est pas impossible qu'on puisse rencontrer un cas où, les autres conditions étant d'ailleurs remplies, la forme quadratique ternaire aurait la forme moins particulière

$$\alpha UU_0 + \beta VV_0.$$

On aurait alors des fonctions hyperfuchsiennes de u et v, pour lesquelles le groupe des substitutions aurait la forme

$$\left(u, \quad v, \quad \frac{au+b}{cu+d}, \quad \frac{cv+a'u+b'}{cu+d}\right)$$