BULLETIN DE LA S. M. F.

CARVALLO

Note sur les expressions obtenues par Duhamel et par Lamé pour le flux de chaleur dans les solides non isotropes

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 167-173.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__167_0>

Note sur les expressions obtenues par Duhamel et par Lamé pour le flux de chaleur dans les solides non isotropes; par M. Carvallo.

(Séance du 15 juin 1887.)

1. *Introduction.* — « Le principe admis est celui-ci : Lorsque deux molécules d'un milieu solide athermane et homogène ont des températures inégales, la plus chaude cède à la plus froide une quantité de chaleur égale au produit de la différence des températures par l'élément du temps et par un troisième *facteur* dépendant à la fois et de la distance et des angles qui assignent sa direction, *ce facteur ayant toutefois la même valeur pour deux directions opposées l'une à l'autre.* »

C'est ainsi que s'exprime Lamé (1) en parlant du beau Mémoire de Duhamel (2) sur la propagation de la chaleur dans les solides non isotropes, et plus loin, parlant de sa propre théorie :

« Pour entrer dans la phase définitive que j'ai indiquée, il ne reste plus qu'à écarter la restriction imposée par l'identité admise des valeurs de la *fonction-facteur* pour deux directions opposées l'une à l'autre. »

C'est là ce que fait le célèbre physicien et il trouve un résultat plus général que Duhamel, l'expression qu'il obtient pour le flux renfermant neuf coefficients au lieu de six. Écarter une restriction et par là trouver des résultats plus généraux, tel est, suivant Lamé, le progrès réalisé par sa théorie. Une marche analogue, dans l'élasticité, l'a conduit à deux coefficients au lieu d'un seul primitivement obtenu, « circonstance fort heureuse, dit-il, en ce qu'elle écarte complètement les objections qui résultaient des expériences de M. Wertheim et d'autres physiciens ».

L'avantage n'est pas aussi grand dans la théorie de la chaleur, car les résultats de Duhamel suffisent et la plus grande généralité de Lamé n'est nullement nécessitée par l'expérience, de façon

---

(1) *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*. Discours préliminaire, p. 15.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIII

qu'elle n'introduit en réalité que de la complication. Il y a plus, l'hypothèse de Duhamel sur la *fonction-facteur* n'a pour effet que de faciliter les intégrations, et je me propose de montrer ici que, même l'hypothèse étant écartée, les formules de Lamé sont trop générales et ses neuf coefficients doivent être réduits aux six de Duhamel.

2. *Loi de l'échange de la chaleur entre deux points.* — L'échange de chaleur n'est supposé se faire qu'entre molécules très voisines. Soient m et m' deux de ces molécules aux températures V et V'; on admet que la quantité de chaleur qui passe de m' à m est proportionnelle à l'élément de temps dt et à la différence très petite de température $V' - V$.

Or, si l'on désigne les cosinus directeurs de la direction mm' par α, β, γ et la longueur mm' par r, on a, en bornant l'approximation au premier ordre,

$$V' - V = r\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

L'échange de chaleur est donc proportionnel à cette quantité ou simplement à celle que renferme la parenthèse. Quant au *coefficient de proportionnalité, je ne ferai aucune hypothèse à son sujet;* il aura seulement, pour chaque couple de molécules, une valeur déterminée qui dépend de la nature et des positions relatives des deux molécules.

3. *Flux de chaleur à travers un élément de surface. Définition et méthode d'évaluation.* — « Si l'on considère un élément plan infiniment petit dans l'intérieur d'un corps solide limité ou indéfini, la chaleur traversera cet élément dans tous les sens : nous appellerons *flux* la quantité de chaleur qui passe d'un côté moins celle qui passe de l'autre. Cette différence changera de signe sans changer de grandeur, quand on considérera successivement les deux côtés du plan de l'élément (¹) : le signe de flux dépendra donc

(¹) Ce fait résulte d'une simple convention de signe aussi simplement que la valeur algébrique d'un segment change de signe quand on change le sens dans lequel on le compte positivement. Il ne faudrait donc pas le confondre avec l'hypothèse sur la *fonction-facteur*, qui seule est attaquée par Lamé.

du sens que l'on considérera et qui sera toujours déterminé par la direction de la normale prise à partir de l'élément. »

Telle est la définition de Duhamel. D'après cette définition, je considère un élément de surface σ dont la normale munie d'un sens est ON. Je prends un point m du côté de ON, un point m' de l'autre côté par rapport au plan de l'élément et de façon que la droite mm' coupe σ. Je considère la quantité de chaleur échangée comme positive si elle va de m' à m, comme négative si elle va de m à m'. Je dois faire la somme algébrique de toutes les quantités de chaleur écoulées pendant le temps dt, pour tous les couples (m, m') formés de cette façon. Pour cela, je considère les cylindres de toutes directions ayant pour base σ; pour un de ces cylindres, je prends les couples de points (m, m'), tels que la droite qui les joint soit dans l'intérieur du cylindre et parallèle aux génératrices; enfin je fais la somme des flux ainsi obtenus pour toutes les directions de génératrices. J'ajouterai que, pour relier entre eux les résultats correspondant à ces divers cylindres, j'emploie comme intermédiaires les cylindres circonscrits à une sphère : c'est là le point original de la méthode.

4. *Évaluation du flux à travers un élément de surface.* — I. Je considère une sphère O infiniment petite, une direction OA ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, puis le cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à OA. Ce cylindre touche la sphère suivant un cercle ε. Enfin je prends un point m du côté de OA par rapport au plan du cercle ε, un point m' de l'autre côté, sous la condition que la droite mm' soit parallèle aux génératrices et comprise dans l'intérieur du cylindre. La quantité de chaleur qui passe de m' à m est proportionnelle (n° 2) à $\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}$. Je fais la somme de tous les flux qui correspondent aux couples tels que (m, m'), j'obtiens une quantité $k\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right)\varepsilon\,dt$ dans laquelle, pour la direction OA, k est une constante qui ne dépend que de la nature du corps. Pour une autre direction OA_1 ayant pour cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1, on aurait une autre constante k_1, et la quantité de chaleur analogue serait

$$k_1\left(\alpha_1\frac{\partial V}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma_1\frac{\partial V}{\partial z}\right)\varepsilon\,dt.$$

Si le corps était isotrope et dans ce cas seulement, on aurait toujours

$$k_1 = k.$$

Remarque. — Dans la sommation précédente, je peux négliger les points intérieurs à la sphère, ou les introduire sans changer le résultat; car, s'il est vrai que l'écoulement de chaleur ne se fait qu'entre points très voisins, néanmoins la distance limite très petite est finie. Ainsi les points que je considère sont contenus dans un cylindre ayant une section infiniment petite mais une hauteur finie; au contraire, la sphère a toutes ses dimensions infiniment petites. On peut donc, dans l'évaluation précédente, négliger les points qui y sont contenus ou les introduire indifféremment.

II. Je considère maintenant le grand cercle σ à travers lequel je veux évaluer le flux; soit ON la normale à ce cercle, λ, μ, ν ses cosinus directeurs. Je considère le faisceau cylindrique ayant pour base σ et pour génératrices des parallèles à OA : il est une portion du cylindre circonscrit à la sphère et cette portion est au cylindre total dans le rapport de la projection de σ sur le plan du cercle ε à ce cercle lui-même. Or ce rapport est égal au cosinus de l'angle des normales ON, OA, et ce cosinus a pour valeur

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

Multipliant le flux précédemment obtenu par ce cosinus et divisant par $\sigma\, dt$ ou par son égal $\varepsilon\, dt$, il vient

$$(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) k \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Je ferai encore les remarques suivantes :

1° Le raisonnement précédent ne semble rigoureux que si l'on considère le flux qui traverse, non pas l'élément σ lui-même, mais sa projection sur le plan du cercle ε; mais il n'y a de différence que pour les points qui sont dans les onglets compris entre σ et ε, et, d'après une remarque précédente, la quantité correspondante est infiniment petite d'ordre supérieur à celle qu'on évalue.

2° J'ai admis aussi que le flux qui traverse un cylindre de direction OA est proportionnel à la section de ce cylindre.

Cela est vrai rigoureusement dans un corps homogène et serait vrai seulement à un infiniment petit près d'ordre supérieur dans un corps hétérogène.

3° Avant de faire la somme des flux partiels qui répondent à toutes les directions OA, il est utile d'apporter à ce qui précède une modification qui permette de mettre cette somme sous la forme ordinaire d'une intégrale. Pour cela, j'appliquerai le raisonnement précédent, non plus au simple cylindre de direction OA, mais au faisceau des cylindres dont les génératrices sont parallèles aux droites qui joignent le centre d'une sphère de rayon 1 à tous les points d'un élément $d\omega$ de la surface de cette sphère. Le flux de chaleur $k\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ est remplacé par un flux qui contient $d\omega$ en facteur et qui est de la forme

$$K\,d\omega\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Dans cette expression, K est une constante pour la direction OA, variable avec cette direction et qui dépend de la nature du corps. De cette façon je néglige la variation de $\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}$ pour les directions renfermées dans le cône d'ouverture $d\omega$. Mais il est clair que, la fonction V étant supposée continue ainsi que ses dérivées, on ne néglige ainsi que des termes d'ordre supérieur. Enfin ce flux, qui traverse l'ensemble des cercles normaux aux directions du pinceau d'ouverture $d\omega$, peut être regardé comme traversant le cercle ε. Pour passer de ce flux à celui qui traverse σ, il suffit encore de multiplier le précédent par $\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu$, car on néglige ainsi seulement un infiniment petit d'ordre supérieur. En résumé, le flux qui traverse σ parallèlement au faisceau des directions définies par le cône d'ouverture $d\omega$ est, au facteur près $\sigma\,dt$,

$$(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)K\,d\omega\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

III. Il reste à faire la somme de tous ces flux partiels de façon à embrasser tous les couples de points (m, m'). Il vient ainsi pour le flux correspondant à l'élément σ de normale ON

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\int K\alpha^2\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial x}+\int K\alpha\beta\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial y}+\int K\alpha\gamma\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\&+\mu\left(\int K\beta\alpha\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial x}+\int K\beta^2\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial y}+\int K\beta\gamma\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\&+\nu\left(\int K\gamma\alpha\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial x}+\int K\gamma\beta\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial y}+\int K\gamma^2\,d\omega\,\frac{\partial V}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Les intégrations doivent être étendues à un hémisphère, d'ailleurs arbitraire, de façon à comprendre et une fois seulement chaque couple (m, m').

5. *Conclusion.* — Comme on voit, l'expression précédente du flux ne contient que six coefficients

$$\begin{aligned}&A=\int K\alpha^2\,d\omega, &&B=\int K\beta^2\,d\omega, &&C=\int K\gamma^2\,d\omega,\\&D=\int K\beta\gamma\,d\omega, &&E=\int K\gamma\alpha\,d\omega, &&F=\int K\alpha\beta\,d\omega.\end{aligned}$$

Ce résultat est identique à celui de Duhamel. Au contraire, Lamé trouve des valeurs distinctes pour les neuf coefficients des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$; et ce résultat ne coïncide avec le précédent que dans le cas appelé par Lamé cas de l'égalité symétrique. Or, dans l'analyse précédente, on a écarté cette restriction que la *fonction-facteur* ait la même valeur pour deux directions opposées. Ce n'est donc pas à ce fait, mais à une imperfection de son analyse qu'est due la plus grande généralité de Lamé, et cette imperfection est, pensons-nous, dans la définition qu'il donne du flux.

En effet, il considère un cylindre C normal à σ, ayant pour base cet élément et tracé seulement d'un côté de lui. La quantité de chaleur envoyée par ce cylindre à toute la région du corps située de l'autre côté du plan de l'élément est ce que Lamé appelle le *flux élémentaire* correspondant à σ. Cette définition peu rationnelle n'introduit pas tous les couples de points tels que la droite qui les joint traverse σ et en introduit qui ne satisfont pas à cette condition; elle ne permet pas de reprendre le calcul de Duhamel ni le raisonnement que je viens de présenter. Il y a plus, on voit intuitivement que, en prenant n'importe quelle définition, plus arbitraire encore que la dernière, on arriverait pour le flux à une expression de la forme

$$\left(A\frac{\partial V}{\partial x}+B\frac{\partial V}{\partial y}+C\frac{\partial V}{\partial z}\right)\sigma\, dt,$$

dans laquelle A, B, C sont des constantes qui dépendent de la direction ON. On aurait donc, comme Lamé, neuf coefficients pour les trois flux coordonnés, et cela sans se donner la peine de faire aucun calcul.