

# BULLETIN DE LA S. M. F.

M. A. PELLET

## **Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné à l'aide de la règle et du compas**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 16 (1888), p. 113-119.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1888\\_\\_16\\_\\_113\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__113_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

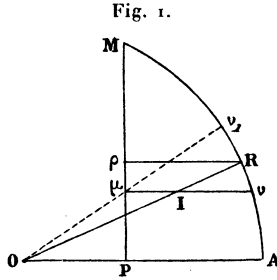
Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas; par M. A. PELLET.*

(Séance du 18 janvier 1888.)

M. Collignon a proposé au Congrès de Toulouse, de l'Association française pour l'avancement des Sciences, une méthode pour diviser approximativement un arc de cercle en un certain nombre de parties égales. Cette méthode repose sur la remarque suivante, qui lui a été suggérée par un dessinateur. Soient (*fig. 1*)  $AM = a$  un arc de cercle plus petit que  $\frac{\pi}{2}$ ,  $AR = ma$ ,  $P\mu = mPM$  et I l'intersection de OR avec  $\mu\nu$ , perpendiculaire sur PM. Le rapport  $\frac{\mu I}{PA}$ , fonction de  $a$  et de  $m$ , varie très peu lorsque  $a$  va de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ ,

mais il varie sensiblement lorsque  $m$  varie de 0 à  $\frac{1}{2}$ . Si donc on connaît la valeur de ce rapport pour une valeur de  $m$ , on pourra construire le point R, quel que soit  $a$ . Au lieu du rapport  $\frac{\mu I}{PA}$ , considérons le rapport  $\frac{\mu I}{\rho R}$ ; ce rapport est toujours voisin de  $\frac{2}{3}$  lorsque  $m$  est compris entre 0 et  $\frac{1}{2}$  et  $a$  inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ ; d'où une construction uniforme pour avoir le point R, quels que soient  $m$



et  $a$ . L'erreur commise peut facilement être rendue inférieure à  $\frac{1}{1000}$  du rayon.

1. Supposons d'abord AR quelconque et désignons-le par  $x$ . On a

$$r = \frac{\mu I}{\rho R} = \frac{m \sin a \cos x - \cos a \sin x}{\sin x (\cos x - \cos a)},$$

dont la dérivée est

$$r' = \frac{-m \sin a \cos^3 x - \cos a \sin^3 x + m \sin a \cos a}{\sin^2 x (\cos x - \cos a)^2}.$$

Cette dérivée est négative lorsque  $x$  va de 0 à l'arc dont la tangente est égale à  $m \operatorname{tang} a$ ; on le voit aisément en prenant la dérivée du numérateur

$$-m \sin a \cos^3 x - \cos a \sin^3 x + m \sin a \cos a,$$

qui est égale à

$$3 \sin x \cos^2 x (m \sin a - \cos a \operatorname{tang} x).$$

Ce numérateur va donc en augmentant lorsque  $x$  va de 0 à arc  $\operatorname{tang}(m \operatorname{tang} a)$ ; or il est négatif pour ces valeurs extrêmes.

Donc, lorsque R va du point  $\nu$  au point  $\nu_1$ , intersection de la circonférence avec la droite  $O\mu$ , le rapport  $\frac{\mu I}{\rho R}$  va en diminuant de 1 à 0. Il en résulte que, si l'on se donne la valeur de ce rapport  $r$ , le point R est déterminé. Soient  $R_1$  un point de l'arc  $\nu\nu'$ ,  $R_1\rho_1$  sa distance à PM; prenons  $\mu I_1 = r\rho_1 R_1$ , la droite  $OI_1$  rencontre la circonférence en un point  $R_2$  compris entre  $R_1$  et R, et ainsi de suite. On peut approcher indéfiniment dans les deux sens du point cherché R.

2. Pour  $m = \frac{1}{3}$  et  $x = \frac{a}{3}$ , on a  $r = \frac{2}{3}$ .

Supposons  $m < \frac{1}{2}$  et posons  $x = ma$ . Le rapport devient

$$\begin{aligned} r &= \frac{m \sin a \cos ma - \cos a \sin ma}{\sin ma (\cos ma - \cos a)} \\ &= \frac{(1+m) \sin a (1-m) - (1-m) \sin a (1+m)}{\sin 2ma - \sin a (1+m) + \sin a (1-m)}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (1+m) \sin a (1-m) - (1-m) \sin a (1+m) &= \frac{2}{3} m (1-m^2) a^3 f(a), \\ \sin 2am - \sin a (1+m) \sin a (1-m) &= m (1-m^2) a^3 \varphi(a), \end{aligned}$$

$f(a)$  et  $\varphi(a)$  représentant les séries

$$f(a) = 1 - \frac{1+m^2}{10} a^2 + \frac{(3+m^2)(1+3m^2)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a^4 - \dots + (-1)^i A_i a^{2i} + \dots,$$

$$\varphi(a) = 1 - \frac{1+3m^2}{12} a^2 + \frac{(1+3m^2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^4 - \dots + (-1)^i B_i a^{2i} + \dots,$$

où

$$\begin{aligned} A_i &= 3 \frac{(1+m)^{2i+2} - (1-m)^{2i+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2i+3) 2m}, \\ B_i &= \frac{(1+m)^{2i+3} - (1-m)^{2i+3} - (2m)^{2i+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2i+3) m (1-m^2)}. \end{aligned}$$

$A_i, B_i$  sont des fonctions entières de  $m$  dont la différence est divisible par  $1 - 9m^2$ .

Le rapport  $\frac{A_i}{B_i}$  est égal à

$$\frac{1}{2} (1-m) \frac{1-p^{2i+2}}{1-p^{2i+3} - (1-p)^{2i+3}},$$

$p$  désignant  $\frac{1-m}{1+m}$ . Pour  $m < \frac{1}{3}$ ,  $p$  est plus grand que  $\frac{1}{2}$ ,  $p^{2i+2}$  que

$p^{2i+3} + (1-p)^{2i+3}$ , et l'on a

$$\frac{1-p^{2i+2}}{1-p^{2i+3}-(1-p)^{2i+3}} > 1;$$

la fraction  $\frac{A_i}{B_i}$  est donc plus grande  $\frac{3}{2}(1-m)$ , qui est supérieure à 1 et s'en rapproche indéfiniment lorsque  $i$  tend vers l'infini. Si  $m > \frac{1}{3}$ , on verrait de même que  $\frac{A_i}{B_i}$  est plus petit que  $\frac{3}{2}(1-m)$ , qui est inférieur à 1 et s'en rapproche indéfiniment,  $i$  tendant vers l'infini.

La fonction  $r$  est égale à

$$\frac{2}{3} \frac{f(a)}{\varphi(a)} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} - \frac{1-9m^2}{90} a^2 - \frac{(1+3m^2)(1-9m^2)}{6^2 \cdot 7 \cdot 10} a^4 - \dots$$

Elle est égale à  $\frac{2}{3}$  pour  $a = 0$ , et,  $a$  augmentant jusqu'à  $\frac{\pi}{2}$ , elle va en croissant si  $m$  est plus grand que  $\frac{1}{3}$  et en décroissant si  $m < \frac{1}{3}$ ; pour  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $r$  est égal à  $\frac{m}{\sin \frac{m\pi}{2}}$ . En effet, on a,  $m$  étant plus petit que  $\frac{1}{3}$  et  $a$  que  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$f(a) - \varphi(a) < 0, \quad f'(a) - \varphi'(a) < 0,$$

et, comme  $f(a)$ ,  $-f'(a)$ ,  $\varphi(a)$ ,  $-\varphi'(a)$  sont positifs, on en déduit

$$\varphi(a)f'(a) - f(a)\varphi'(a) < 0.$$

On verrait de même que, pour  $m > \frac{1}{3}$ , on a

$$\varphi(a)f'(a) - f(a)\varphi'(a) > 0.$$

Posons

$$r = \frac{2}{3} - \frac{1-9m^2}{90} \frac{f_1(a)}{\varphi(a)} a^2.$$

$\frac{f_1(a)}{\varphi(a)}$  croît lorsque  $a$  va de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  et  $m$  de 0 à  $\frac{1}{2}$ . Sa valeur maximum est donc

$$-\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{90 \cdot 16}{5 \cdot \pi^2} = 1,2$$

et  $r$  est compris entre

$$\frac{2}{3} - 0,0275(1-9m^2) \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2, \quad \frac{2}{3} - 0,0322(1-9m^2) \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2.$$

3. Cherchons la distance du point  $R_1$  correspondant à  $x = m\alpha$  au point R correspondant à  $r = \frac{\pi}{3}$ . Lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , le sinus de ce dernier arc est égal à  $\frac{3m}{2}$  et l'arc lui-même à

$$\frac{3m}{2} + \frac{1}{2.3} \left(\frac{3m}{2}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4.5} \left(\frac{3m}{2}\right)^5 + \dots$$

Posons

$$\frac{m\pi}{2} - \text{arc sin } \frac{3m}{2} = A m(1 - 9m^2).$$

A est une fonction de  $m^2$  qui va en croissant lorsque  $m^2$  va de 0 à  $\frac{1}{9}$ . On le voit aisément en remplaçant dans le premier membre de cette équation  $m^2$  par  $\frac{1}{9} + \alpha$  après l'avoir divisé par  $m$ . Les coefficients des diverses puissances de  $\alpha$  sont tous positifs et le terme indépendant de  $\alpha$  est nul. A est toujours inférieur à 0,1 et sa valeur est très voisine de 0,08 pour  $m = \frac{1}{3}$ , de 0,07 pour  $m = 0$ .

Supposons (*fig. 2*)  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $m < \frac{1}{3}$ .

Alors  $AR_1 > AR$ . On a

$$\frac{I_1 I \sin m\alpha}{OI} = \sin \delta,$$

$\delta$  désignant l'arc  $RR_1$ .

Or

$$\begin{aligned} I_1 I &= r\rho R - r\rho_1 R_1, \\ I_1 I &= r(\rho R - \rho_1 R_1) + (r - r_1)\rho_1 R_1; \end{aligned}$$

mais

$$\rho R - \rho_1 R_1 = 2 \sin \frac{2m\alpha - \delta}{2} \sin \frac{\delta}{2};$$

par suite

$$\rho R - \rho_1 R_1 < \sin m\alpha \sin \delta,$$

et il vient

$$\frac{(r - r_1)\rho_1 R_1 \sin m\alpha}{OI} > \left(1 - \frac{r}{OI} \sin^2 m\alpha\right) \sin \delta;$$

d'ailleurs

$$\rho_1 R_1 = \cos m\alpha - \cos \alpha, \quad \rho_1 R_1 \sin m\alpha = \frac{m(1 - m^2)}{2} a^3 \varphi(a)$$

et

$$r - r_1 = \frac{1 - 9m^2}{90} f_1(a) \frac{a^2}{\varphi(a)}$$

d'après le n° 2; par conséquent,

$$\frac{(1-m^2)f_1(a)}{180(OI-r\sin^2 ma)} m(1-9m^2)a^5 > \sin \delta,$$

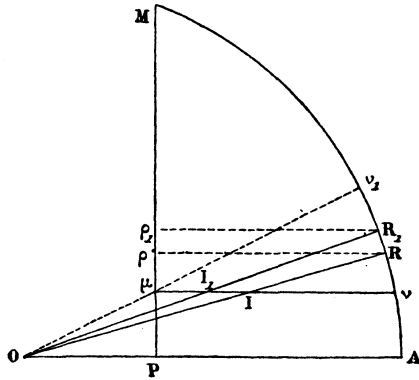
$$OI = \frac{\cos a + \frac{2}{3}(\cos AR - \cos a)}{\cos AR} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{\cos a}{2 \cos AR} \right).$$

La fonction

$$\frac{1-m^2}{180(OI-r\sin^2 ma)} < \frac{1-m^2}{120 \cos^2 ma}$$

atteint sa valeur maximum pour  $a = \frac{\pi}{2}$  et  $m = \frac{1}{3}$ ;  $f_1(a)$  est d'ail-

Fig. 2.



leurs toujours inférieur à 1 et il vient, en définitive,

$$0,1 m(1-9m^2) \left( \frac{2a}{\pi} \right)^5 > \sin \delta.$$

Si  $m > \frac{1}{3}$ ,  $r_1$  est supérieur à  $\frac{2}{3}$ ,  $AR > AR_1$ ; les calculs précédents subsistent avec quelques modifications; dans le dénominateur,  $OI - r \sin^2 ma$  doit être remplacé par  $OI - r \sin^2 AR$ , et l'on trouve que

$$\frac{1}{7}(\nu_1 - 9m^2) m \left( \frac{2a}{\pi} \right)^5$$

est toujours plus grand en valeur absolue que  $\sin \delta$  et de même signe.

4. Dans la pratique du dessin, toute distance inférieure à  $\frac{1}{5}$  de

millimètre est négligeable. On pourra donc substituer le point R au point R<sub>1</sub> lorsque

$$\frac{R}{7} m(1 - 9m^2) \left(\frac{2a}{\pi}\right)^5.$$

R, désignant le rayon du cercle, sera inférieur à 0,0002. Lorsque R, le rayon, est plus petit que 0<sup>m</sup>,50, cette limite n'est pas atteinte, quel que soit *m*, supposé toujours plus petit que  $\frac{1}{2}$ , pourvu que *a* soit inférieur à  $\frac{\pi}{6}$ ; en opérant donc sur le reste de la division d'un arc par  $\frac{\pi}{6}$ , le résultat pourrait être considéré comme rigoureux. En outre, lorsque *m* est voisin de  $\frac{1}{2}$  ou de  $\frac{1}{6}$ , il est avantageux de diviser l'arc dans le rapport  $\frac{1}{2} - m$ , d'où l'on déduira facilement la fraction *m*.

---