BULLETIN DE LA S. M. F.

FABRY

Réductibilité des équations différentielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 135-142.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__135_1>

Réductibilité des équations différentielles linéaires;
par M. Fabry.

(Séance du 21 mars 1888.)

Soit une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x,

$$P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0. \tag{1}$$

Il s'agit de chercher s'il existe une équation d'ordre moindre et de même forme, dont toutes les intégrales vérifient l'équation donnée (1), et de calculer ses coefficients.

Nous exposerons d'abord quelques principes sur lesquels repose la solution de la question. Soit $x = a$ une valeur singulière, une intégrale anormale de l'équation (1) est de la forme

$$(2) \qquad (x-a)^r e^{\left[\varphi(x-a)^{-\frac{1}{\nu}}\right]} \mathrm{F}\left[(x-a)^{\frac{1}{\nu}}, \log(x-a), (x-a)\right].$$

φ étant un polynôme entier en $(x-a)^{-\frac{1}{\nu}}$, ν un nombre entier, F une fonction entière en $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ et $\log(x-a)$, dont les coefficients sont des séries ordonnées suivant les puissances entières de $x-a$. Si $\log(x-a)$ entre à la puissance μ, cette intégrale est d'ordre $\mu\nu$, c'est-à-dire que l'on en déduit $\mu\nu$ intégrales distinctes de l'équation (1). Si $\nu = 1$, l'intégrale est normale; si $\varphi = 0$, elle est régulière.

Si l'on cherche les intégrales de forme précédente, on en trouve m distinctes; mais les séries qui y entrent sont, en général, divergentes. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ces fonctions mises sous la forme (2). Si l'on forme l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{d^m y}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{dy}{dx} & y \\ \frac{d^m y_1}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{dy_1}{dx} & y_1 \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{dy_2}{dx} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{dy_m}{dx} & y_m \end{vmatrix} = 0,$$

les coefficients peuvent se développer sous la forme (2); les logarithmes disparaissent, ainsi que les exposants fractionnaires dans les séries, de sorte que ces coefficients sont de la forme

$$(x-a)^r e^{\varphi\left(\frac{1}{x-a}\right)} \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{A}_n (x-a)^n.$$

Les séries Σ peuvent être divergentes, mais il est facile d'en calculer un nombre de termes déterminé. Soient $\mathrm{P}'_0, \mathrm{P}'_1, \ldots, \mathrm{P}'_m$ ces coefficients. Si l'on ramène le premier à une valeur P_0 en formant les quantités $P_0 \frac{P'_1}{P'_0}$, $P_0 \frac{P'_2}{P'_0}$, ..., $P_0 \frac{P'_m}{P'_0}$, que l'on ordonne suivant les puissances croissantes dè $x - a$, on doit retrouver les mêmes termes que dans les développements de P_1, P_2, ..., P_m. Si l'équation (1) a ses coefficients entiers, les fonctions P_0, $\frac{P'_n}{P'_0}$ se réduiront à des polynômes limites, et les termes que l'on pourrait calculer en plus seront identiquement nuls.

Supposons que l'équation (1) admette toutes les intégrales d'une équation de même forme

$$(3) \qquad q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + q_{n-1} \frac{dy}{dx} + q_n y = 0.$$

Si l'on remplace dans (1) $\frac{d^n y}{dx^n}$ et les dérivées suivantes de y par les valeurs déduites de (3), on doit trouver une identité. Les intégrales de forme (2) que l'on obtient pour l'équation (3) vérifient identiquement l'équation (1), même lorsque les séries sont divergentes; donc les n intégrales anormales de l'équation (3) sont comprises parmi les m qu'on obtient pour l'équation (1).

Connaissant l'équation (1) et l'ordre $n < m$, nous allons chercher dans quel cas l'équation (3) existe et comment on peut calculer ses coefficients. On peut toujours supposer $q_0 = 0$, q_1, q_2, ..., q_n étant des fractions rationnelles que l'on peut décomposer en fractions simples. Ainsi

$$q_1 = \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \frac{A_{\nu-1}}{(x-a)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_{\nu'}}{(x-b)^{\nu'}} + \ldots$$
$$+ \frac{B_\nu}{x-b} + \ldots + C_0 + C_1 x + \ldots + C_\mu x^\mu + \frac{\lambda}{x-\alpha} + \frac{\lambda'}{x-\alpha'} + \ldots.$$

a, b, ... sont les valeurs singulières de x dans l'équation (1); α, α', α'', ... sont des valeurs d'apparence singulière pour (3) qui ne sont pas singulières dans l'équation (1), de sorte que l'équation déterminante de (3), pour $x = \alpha$,

$$\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1) + \lambda\,\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+2) + \ldots = 0,$$

a n racines entières différentes et inférieures à m. Il en résulte que λ est un nombre entier négatif, compris entre -1 et $-n(m-n)$.

Pour $x = a$, on calculera les intégrales anormales de l'équation (1) et l'on en choisira n qui doivent vérifier l'équation (3), en remarquant que, si l'on prend une intégrale de forme (2), on doit prendre en même temps celles qui s'en déduisent.

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dy_1}{dx} & y_1 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dy_n}{dx} & y_n \end{vmatrix} = e^{\Sigma\varphi}(x-a)^{A_1}F;$$

$\Sigma\varphi$ est un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, F une série dont le premier terme n'est pas nul, mais qu'il est inutile de calculer; l'exposant A_1 diffère de Σr d'un nombre entier que l'on peut calculer facilement. Pour que ces n intégrales vérifient l'équation (3), il faudra

$$q_1 = -\frac{\Delta'}{\Delta} = -\Sigma\varphi' - \frac{A_1}{x-a} - \frac{F'}{F},$$

ce qui détermine dans q_1 les termes à exposants négatifs en $x-a$.

En général, les m intégrales anormales de l'équation (1) peuvent se grouper n à n d'un nombre limité de manières, et l'on en déduit les valeurs possibles pour les termes en $\frac{1}{x-a}$ dans q_1. Cependant, si, parmi les m intégrales anormales de l'équation (1), on en trouve deux ayant le même facteur $(x-a)^r e^{\varphi\left[(x-a)^{-\frac{1}{\nu}}\right]}$ et qui ne se déduisent pas de la même intégrale, il faudra, dans certains des groupes de n intégrales, laisser des constantes arbitraires pour obtenir tous les groupes possibles. On pourra toujours former un nombre limité de valeurs de Δ, dans lesquelles $\Sigma\varphi$ sera complètement déterminé; A_1 sera en général déterminé et F sera une série contenant un nombre fini de constantes arbitraires; si, pour certaines valeurs des constantes, les premiers termes de F disparaissent, l'exposant A_1 sera augmenté d'un nombre entier, mais dans tous les cas on aura, pour $\Sigma\varphi$ et A_1, un nombre limité de valeurs possibles. Dans le coefficient q_1, on pourra donc calculer les systèmes de valeurs possibles pour les coefficients $A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_1$, $B_{\nu'}, \ldots, B_1, \ldots$ correspondant à chaque valeur singulière de x, a, b, ...

De même, pour la valeur singulière $x = \infty$, on cherchera les intégrales régulières, normales et anormales de l'équation (1) sous la forme

$$\left(\frac{1}{x}\right)^r e^{\varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)} F(x^{-\frac{1}{\nu}}, \log x, x^{-1}).$$

On formera les groupes possibles de ces intégrales n à n et, pour chaque groupe, le déterminant

$$\Delta = \left(\frac{1}{x}\right)^{K} e^{\Sigma\varphi} F\left(\frac{1}{x}\right).$$

En ordonnant q_1 suivant les puissances décroissantes de x, on doit avoir

$$C_\mu x^\mu + \ldots + C_1 x + C_0 + \sum \frac{\lambda}{x}\left[1 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \ldots\right] + \sum \frac{A_1}{x}\left(1 + \frac{a}{x} + \ldots\right) + \ldots$$
$$= -\frac{\Delta'}{\Delta} = -\Sigma\varphi' + \frac{K}{x} - \frac{F'}{F},$$

d'où

$$C_\mu x^\mu + \ldots + C_1 x + C_0 = -\Sigma\varphi', \qquad \Sigma\lambda = -\Sigma A_1 + K;$$

or λ, λ', ... doivent être des nombres entiers négatifs.

On devra donc chercher, parmi les valeurs possibles de A_1, B_1, ..., K, s'il existe un système tel que $+\Sigma A_1 - K$ soit un nombre entier. Pour connaître q_1, il ne reste qu'à déterminer $\lambda, \lambda', \ldots$ et $\alpha, \alpha', \ldots$; pour $x = \infty$, on développera le déterminant Δ et la série $F\left(\frac{1}{x}\right)$; on doit avoir l'identité

$$q_1 = \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \ldots + C_0 + C_1 x + \ldots + C_\mu x^\mu + \sum \frac{\lambda}{x-\alpha}$$
$$= -\frac{\Delta'}{\Delta} = -\Sigma\varphi' + \frac{K}{x} - \frac{F'}{F}.$$

F est en général une série divergente; mais cette égalité indique que, si l'on développe les deux membres suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, les coefficients sont identiques. Cette condition est équivalente à la suivante :

$$-\sum \frac{\lambda}{x-\alpha} = \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \ldots - \frac{K}{x} + \frac{F'}{F}$$

ou

$$
\begin{aligned}
&(x-\alpha)^{-\lambda}(x-\alpha')^{-\lambda'}\ldots \\
&\quad = \frac{(x-a)^{A_1}(x-b)^{B_1}\ldots x^{-K}}{F} F e^{-\frac{A_\nu}{(\nu+1)(x-a)^{\nu-1}}-\ldots-\frac{A_2}{x-a}\cdots} \\
&\quad = x^{-\Sigma\lambda}\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{A_1}\left(1-\frac{b}{x}\right)^{A_2}\ldots}{F} e^{-\frac{A_1}{(\nu-1)(x-a)^{\nu-1}}-\ldots-\frac{A_2}{x-a}\cdots}.
\end{aligned}
$$

— $\Sigma\lambda$ est un nombre entier positif; on calculera dans la série F un nombre de termes supérieur, et l'on développera le second membre suivant les puissances de $\frac{1}{x}$; on devra trouver un polynôme entier qui est égal à $(x-\alpha)^{-\lambda}(x-\alpha')^{-\lambda'}\ldots$; si l'on calcule d'autres termes en $\frac{1}{x}$, ils doivent être identiquement nuls.

Remarques. — Dans le cas particulier où la valeur $x=\infty$ n'est pas singulière pour l'équation (1), K sera un nombre entier compris entre $n(n-1)$ et $n(m-1)$; on pourra toujours développer les n intégrales et F en y laissant des constantes arbitraires, et, en exprimant que $(x-\alpha')^{-\lambda}(x-\alpha')^{-\lambda'}\ldots$ se réduit à un polynôme entier, on aura, en général, des équations qui détermineront les constantes.

Dans l'équation (3), on connaîtra ainsi le coefficient q_1 et les développements des n intégrales anormales pour chacune des valeurs singulières $a, b, \ldots, \infty$. On se servira de ces développements pour calculer dans les coefficients $q_2, \ldots, q_n$ les termes ayant des puissances négatives de $x-a$, $x-b, \ldots$, et de la valeur $x=\infty$ on déduit les termes entiers en x.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
q_2 = {} & \frac{A'_\nu}{(x-a)^\nu}+\ldots+\frac{A'_1}{x-a}+\frac{B'_{\nu'}}{(x-b)^{\nu'}}+\ldots+\frac{B'_1}{x-b}+\ldots \\
& + C'_0 + C'_1 x+\ldots+C'_\mu x^\mu+\frac{L}{(x-\alpha)^2}+\frac{M}{x-\alpha}+\frac{L'}{(x-\alpha')^2}+\frac{M'}{x-\alpha'}+\ldots,
\end{aligned}
$$

où il ne reste d'inconnus que $LL'\ldots$, $MM'\ldots$. Mais, pour la valeur $x=\infty$, on peut développer les n intégrales anormales et, par suite, le coefficient q_2; on en déduira le développement de

$$\sum\frac{L}{(x-\alpha)^2}+\sum\frac{M}{x-\alpha},$$

et il suffit de calculer un nombre de termes égal à deux fois le nombre des valeurs $\alpha, \alpha', \ldots$ pour en déduire les coefficients L, M.

La même méthode permet de calculer tous les coefficients de l'équation (3); il faudra ensuite vérifier si l'équation donnée (1) est une conséquence de (3).

Application. — Soit l'équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^m y}{dx^m} + (A_1 x + A'_1)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (A_2 x^2 + A'_2 x + A''_2)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots \\ &\qquad + y(A_m x^m - A'_m x^{m-1} + A''_m x^{m-2} + \ldots) = 0, \end{aligned} \right.$$

qui n'a que la valeur singulière $x = \infty$, pour laquelle on trouve m intégrales de forme normale

$$y = e^{B\frac{x^2}{2} + Cx} x^{-\rho}\left[1 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots\right],$$

où B est racine de l'équation

$$B^m + A_1 B^{m-1} + \ldots + A_m = \varphi(B) = 0,$$

$$C = -\frac{A'_1 B^{m-1} + A'_2 B^{m-2} + \ldots + A'_m}{\varphi'(B)},$$

$$\rho = \frac{B + C^2}{2} \times \frac{\varphi''(B)}{\varphi'(B)} + \frac{C[(m-1)A'_1 B^{m-2} + (m-2)A'_2 B^{m-3} + \ldots + A'_{m-1}] + A''_2 B^{m-2} + \ldots + A''_m}{\varphi'(B)}.$$

Pour que l'équation donnée soit réductible au premier ordre, il faut que, parmi les m valeurs de ρ, il y en ait une entière négative; il devra, en outre, exister $m - 2$ relations entre les coefficients A, que l'on obtient en posant $y = e^{B\frac{x^2}{2} + Cx} Z$ et en exprimant que l'équation en Z admet pour intégrale un polynôme de degré $-\rho$.

Par exemple, si $m = 2$, pour que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 x + A'_1)\frac{dy}{dx} + (A_1 x^2 + A'_2 x + A''_2)y = 0$$

soit réductible, il faut que

$$\frac{1}{\sqrt{A_1^2 - 4A_2}}\left[A''_2 - \frac{A_1}{2} - \frac{A'^2_1}{4} + \frac{(A_1 A'_1 - 2A'_2)^2}{4(A_1^2 - 4A_2)}\right] = n + \tfrac{1}{2},$$

n étant un nombre entier positif ou négatif, et cette condition est suffisante.

On peut simplifier, dans bien des cas, les calculs, en remarquant que, pour qu'une équation soit réductible à l'ordre n, il faut que l'équation adjointe soit réductible à l'ordre $m - n$.

Ainsi l'équation (4) a pour adjointe

$$\frac{d^m y}{dx^m} - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(A_1 x + A'_1)y + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(A_2 x^2 + A'_2 x + A''_2)y + \ldots = 0,$$

dont les intégrales normales, pour $x = \infty$, seront de la forme

$$e^{-\frac{Bx^2}{2} - C} x^{-\rho'} \left[1 + \frac{C'_1}{x} + \ldots\right],$$

B et C ayant les valeurs précédentes et $\rho' = m - 1 - \rho$.

Ainsi, pour que l'équation (4) soit réductible à l'ordre $m - 1$, il faut que ρ' ait une valeur entière négative, c'est-à-dire que, parmi les m valeurs de ρ, il y en ait une entière supérieure à $m - 2$; il doit en outre exister $m - 2$ relations entre les coefficients A.

Par exemple, pour chercher si l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2}(A_1 x + A'_1) + \frac{dy}{dx}(A_2 x^2 + A'_2 x + A''_2) \\ + y(A_3 x^3 + A'_3 x^2 + A''_3 x + A'''_3) = 0$$

est réductible, on formera les équations

$$B^3 + A_1 B^2 + A_2 B + A_3 = 0,$$

$$C = -\frac{A'_1 B^2 + A'_2 B + A'_3}{3B^2 + 2A_1 B + A_2},$$

$$\rho = \frac{(B + C^2)(3B + A_1) + C(2A'_1 B + A'_2) + A''_2 B + A''_3}{3B^2 + 2A_1 B + A_2}.$$

On a trois valeurs pour ρ; pour que l'équation donnée soit réductible, il faut que l'une de ces trois valeurs soit entière (positive ou négative), mais différente de 1; en outre, il doit exister une relation entre les coefficients A.