

# BULLETIN DE LA S. M. F.

WILLIOT

## **Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 16 (1888), p. 144-149.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1888\\_\\_16\\_\\_144\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__144_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres  
de Bernoulli; par M. WILLIOT.*

(Séance du 6 juin 1888.)

De nombreuses méthodes ont été proposées pour simplifier, autant que possible, le calcul des nombres de Bernoulli; mais il ne semble pas que l'on ait tiré un parti suffisant des remarquables formules de Seidel, généralisées par M. Stern.

M. E. Catalan, en démontrant le théorème de Staudt et Clausen, a signalé comme avantageux <sup>(1)</sup> l'emploi des nombres entiers

---

(<sup>1</sup>) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, T. IV (mars 1880).

et impairs  $P_n$ , déterminés par la formule

$$P_{2n} = 2(2^{2n} - 1)B_{2n};$$

mais les formules complexes qui lui servent au calcul de  $P_{2n}$  sont un obstacle à l'application de cette méthode. Déjà M. Édouard Lucas, après avoir démontré la seconde formule de Seidel (1),

$$(a) \quad (2^{2n} - 1)B_{2n} + n_2(2^{2n-2} - 1)B_{2n-2} + n_4(2^{2n-4} - 1)B_{2n-4} + \dots = 0,$$

remarque que cette formule équivaut à l'expression symbolique

$$P^n(P+1)^n = 0,$$

où les exposants doivent être transformés en indices après le développement.

Si l'on transforme, à l'aide de cette équation, les  $P_{2n}$  en déterminants, on constitue le Tableau suivant, formé très simplement au moyen des coefficients binomiaux :

$n = 3$	3   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	3	1   0   0   0   0   0   0
$4$	1   6   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	- 17	0   1   0   0   0   0   0
$5$	»   5   10   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	+ 155	0   0   1   0   0   0   0
$6$	»   1   15   15   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	- 2073	0   0   0   1   0   0   0
$7$	»   »   7   35   21   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	+ 38227	0   0   0   0   1   0   0
$8$	»   »   »   1   28   70   28   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	- 929569	0   0   0   0   0   1   0
$9$	»   »   »   9   84   126   36   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	+ 28620619	0   0   0   0   0   0   1
.	»   »   »   1   45   210   210   45   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	.....	.....
.	»   »   »   1   11   165   462   330   55   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	.....	.....
.	»   »   »   1   66   495   924   495   66   1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	.....	.....

La réduction très facile de ce déterminant nous donne aisément dans la première colonne, en dehors de  $P_2 = 1$ ,  $P_4 = 2$ ,  $P_6 = 3$ ,  $P_8 = 17$ ,  $P_{10} = 155$ , ...

La simplification résultant de l'emploi de la formule (a) de M. Seidel est donc considérable; mais les nombres  $P_{2n}$  ont malheureusement une croissance bien plus rapide encore que celle des nombres de Bernoulli, et nous croyons plus avantageux d'avoir recours à l'autre formule de M. Seidel, en la transformant d'une façon analogue.

Cette formule

$$B^{n+1}(B+1)^n + B^n(B+1)^{n+1} = 0$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VIII, n° 5 (1880), p. 172.







on pourrait également calculer directement un déterminant quelconque, c'est-à-dire un nombre quelconque de Bernoulli.

Nous sommes d'ailleurs arrivé à ces déterminants en réduisant l'expression immédiate du coefficient de la formule d'Euler

$$\Delta F(x) = hF'(x) + A_1 \Delta F'(x) \frac{h}{1} \\ + A_2 \Delta F''(x) h^2 + A_3 \Delta F'''(x) h^3 - \dots + A_m \Delta F^m(x) h^m + \dots$$

qui est

$$A_m = \frac{B_m}{1.2 \dots m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & & & & 0 \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & & & & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & & & & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4.5} & \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & & & & 0 \\ & \frac{1}{1.2 \dots m} & \frac{1}{1.2.(m-1)} & \frac{1}{1.2.(m-2)} & \frac{1}{1.2.(m-3)} & & & \frac{1}{1} \\ & \frac{1}{1.2.(m+1)} & \frac{1}{1.2.m} & \frac{1}{1.2.(m-1)} & \frac{1}{1.2.(m-2)} & & & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix}$$

déterminant symétrique formé avec les  $(m + 1)$  premières fonctions  $\frac{1}{\Gamma(P)}$ .

Nous ne donnons pas ces calculs, un peu étendus, qui ne font que conduire à la formule de Seidel.

