

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. KOENIGS

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner est une autre surface de Steiner

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 15-18.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__15_0

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner est une autre surface de Steiner; par M. G. KOENIGS, maître de conférences à l'École Normale supérieure.

(Séance du 5 novembre 1887).

1. Les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point d'une surface de Steiner sont, comme on sait, proportionnelles à des formes quadratiques de trois variables indépendantes,

$$(1) \quad \begin{cases} \rho x = \varphi(\xi, \eta, \zeta) = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\eta\xi + \dots, \\ \rho y = \psi(\xi, \eta, \zeta) = b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\eta\xi + \dots, \\ \rho z = \chi(\xi, \eta, \zeta) = c_{11}\xi^2 + 2c_{12}\eta\xi + \dots, \\ \rho t = \omega(\xi, \eta, \zeta) = e_{11}\xi^2 + 2e_{12}\eta\xi + \dots \end{cases}$$

La section de la surface par le plan

$$(2) \quad Ax + By + Cz + Et = 0$$

est représentée par l'équation

$$(3) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = A\varphi(\xi, \eta, \zeta) + B\psi + C\chi + E\omega = 0.$$

Si le plan n'est pas tangent, une transformation linéaire des va-

D'après la remarque déjà faite, le pôle de $x\gamma$ par rapport à cette conique, ou le pôle du plan (2), a pour coordonnées

$$(4) \quad 2\rho x = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi'} \xi'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'} \eta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta'} \zeta'',$$

et de même pour y, z, t , en prenant ψ, γ, ω au lieu de φ .

Maintenant, si nous nous plaçons dans le cas (f_1), nous devons avoir

$$\begin{aligned} \xi'^2 - \eta' \zeta' &= 0, \\ \xi''^2 - \eta'' \zeta'' &= 0; \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on peut poser, p, q étant deux paramètres,

$$\begin{aligned} \xi' &= p, & \eta' &= 1, & \zeta' &= p^2, \\ \xi'' &= q, & \eta'' &= 1, & \zeta'' &= q^2; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \rho x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'} \xi'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'} \eta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta'} \zeta'' \right) \\ &= a_{11} \xi' \zeta'' + a_{22} \eta' \eta'' + a_{33} \zeta' \zeta'' + a_{12} (\xi' \eta'' + \xi'' \eta') \\ &\quad + a_{13} (\xi' \zeta'' + \xi'' \zeta') + a_{23} (\eta' \zeta'' + \eta'' \zeta') \\ &= a_{11} p q + a_{22} + a_{33} p^2 q^2 + a_{12} (p + q) + a_{13} (p + q) p q + a_{23} (p^2 + q^2). \end{aligned}$$

Posons alors

$$p q = \frac{Z}{H}, \quad p + q = \frac{2\Xi}{H};$$

il viendra, en chassant H^2 et le faisant rentrer dans ρ ,

$$\rho x = 4 a_{23} \Xi^2 + a_{22} H^2 + a_{33} Z^2 + 2 a_{12} \Xi H + 2 a_{13} \Xi Z + (a_{11} - 2 a_{23}) H Z.$$

Le lieu du pôle est donc la surface de Steiner (1) représentée

(1) En supposant que le plan (2) soit pris pour plan de l'infini, on peut donner à ce théorème la forme suivante :

Le lieu des centres des coniques tracées sur une surface de Steiner est une surface de Steiner.

J'ajoute que les quatre plans tangents doubles de la surface (1) sont des plans tangents simples de la surface (5). Si, en effet, $x = 0$ est un plan tangent double de (1), φ est un carré parfait, et peut être réduit à ξ^2 ; tous les a_{ik} sont nuls sauf a_{11} , et la première des formules (5) donne

$$\rho x = a_{11} Z \Xi,$$

ce qui prouve bien que le plan $x = 0$ est tangent à la surface (5).

Les deux surfaces coupent le plan considéré (2) suivant la même courbe du quatrième ordre, etc.

par les équations suivantes, où Ξ, H, Z sont les paramètres

$$(5) \begin{cases} \rho x = 4 a_{23} \Xi^2 + a_{22} H^2 + a_{33} Z^2 + 2 a_{12} \Xi H + 2 a_{13} \Xi Z + (a_{11} - 2 a_{23}) HZ, \\ \rho y = 4 b_{23} \Xi^2 + \dots, \\ \rho z = 4 c_{23} \Xi^2 + \dots, \\ \rho t = 4 e_{23} \Xi^2 + \dots \end{cases}$$

3. Supposons maintenant que le plan (2) soit tangent à la surface. Dans les formules (4) il faudra supposer que

$$\eta' \zeta' = 0, \quad \eta'' \zeta'' = 0.$$

On ne peut avoir en même temps $\eta' = 0, \eta'' = 0$ (ou $\zeta' = 0, \zeta'' = 0$), car deux coniques d'une surface de Steiner n'ont qu'un seul point commun, à moins d'être dans un même plan tangent, ce qui n'est pas le cas. Soit donc $\eta' = 0, \zeta'' = 0$, il vient

$$\rho x = a_{11} \xi' \xi'' + a_{12} \xi' \eta'' + a_{13} \xi'' \zeta' + a_{23} \eta'' \zeta',$$

ou, en divisant par $\eta'' \zeta'$, posant $\frac{\xi'}{\zeta'} = \frac{p}{r}, \frac{\xi''}{\eta''} = \frac{q}{r}$ et faisant rentrer $\frac{r^2}{\zeta' \eta''}$ dans ρ ,

$$\rho x = a_{11} pq + a_{12} pr + a_{13} qr + a_{23} r^2.$$

On trouve donc ici une surface représentée par les équations

$$\begin{aligned} \rho x &= a_{11} pq + a_{13} qr + a_{12} pr + a_{23} r^2, \\ \rho y &= b_{11} pq + \dots, \\ \rho z &= c_{11} pq + \dots, \\ \rho t &= e_{11} pq + \dots \end{aligned}$$

et qui n'est autre qu'une quadrique.

4. Le cas où le plan considéré est un plan tangent double ne donne rien d'intéressant, car les coniques de la surface lui sont toutes tangentes au point où chacune vient rencontrer la conique de contact.