

BULLETIN DE LA S. M. F.

C. - A. LAISANT

Note sur un système de deux courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 172-175.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__172_1

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Note sur un système de deux courbes planes;

par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 18 juillet 1888.)

Soient, dans un même plan, deux courbes quelconques. A partir d'une origine, choisie arbitrairement sur chacune d'elles, portons des arcs égaux, dont les extrémités X, Y (*fig. 1*) sont variables avec la longueur commune des arcs.

Prenons le milieu Z de la droite XY. Nous nous proposons de déterminer la tangente et le rayon de courbure de la courbe (Z) décrite par ce point.

Rapportant les points à une origine quelconque, nous avons

$$(1) \quad 2z = y + x,$$

d'où

$$2dz = dy + dx.$$

Mais, les arcs décrits par X et Y étant égaux en longueur,

$$(2) \quad dx = \varepsilon^{\xi} ds, \quad dy = \varepsilon^{\eta} ds;$$

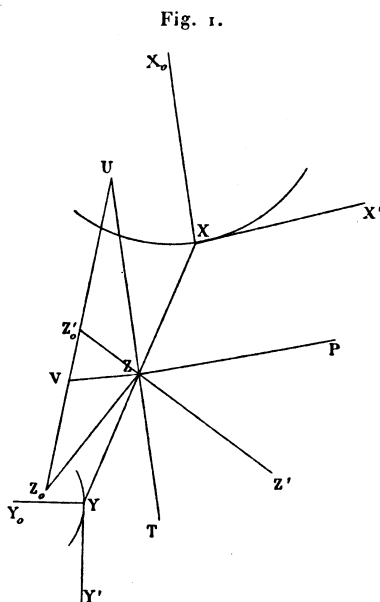
donc

$$(3) \quad dz = \frac{ds}{2} (\varepsilon^{\xi} + \varepsilon^{\eta}) = ds \cos \frac{\xi - \eta}{2} \varepsilon^{\frac{\xi + \eta}{2}}$$

La tangente à la courbe (Z) a par conséquent pour inclinaison $\frac{\xi + \eta}{2}$; c'est-à-dire que si nous menons ZP, ZT parallèles aux tan-

gentes en X et Y, la tangente cherchée sera la bissectrice ZZ' de l'angle PZT.

Il est à remarquer que, si l'on vient à changer le sens suivant lequel sont comptés les arcs sur l'une des courbes, on aura pour la tangente une direction perpendiculaire à la précédente, puisque



l'angle PZT se trouvera remplacé par son adjacent supplémentaire.

Soient maintenant X_0 , Y_0 , Z_0 les centres de courbure en X , Y , Z des courbes (X), (Y), (Z) respectivement.

Nous avons

$$(4) \quad XX_0 = i \frac{ds}{d\xi} \varepsilon \xi, \quad YY_0 = i \frac{ds}{d\eta} \varepsilon \eta.$$

De plus, la longueur de l'élément d'arc dz étant, d'après la formule (3), $ds \cos \frac{\xi - \eta}{2}$, et l'inclinaison de ce même élément $\frac{\xi + \eta}{2}$,

$$(5) \quad ZZ_0 = \lambda i \frac{ds \cos \frac{\xi - \eta}{2}}{d\xi + d\eta} \varepsilon \frac{\xi + \eta}{2}.$$

Des relations (4) et (5) on déduit

$$\frac{d\xi}{ds} \text{XX}_0 + \frac{dy}{ds} \text{YY}_0 = \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds} \right) \text{ZZ}_0,$$

c'est-à-dire, en traçant ZU, ZV respectivement équipollentes à $\text{XX}_0, \text{YY}_0,$

$$(6) \quad \frac{d\xi}{ds} \text{ZU} + \frac{dy}{ds} \text{XV} = \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds} \right) \text{ZZ}_0.$$

Le point Z_0 , centre de courbure cherché, est donc situé sur la droite UV. Nous savons en outre qu'il est situé sur la perpendiculaire à ZZ' , c'est-à-dire sur la normale, ce qui le détermine complètement.

Pour la courbe résultant du changement de sens des arcs sur l'une des courbes données (X) et (Y), il n'y aurait rien de changé, si ce n'est, comme nous l'avons vu plus haut, que ZZ' deviendrait maintenant la normale. Le nouveau centre de courbure Z'_0 serait donc à la rencontre des droites UV et ZZ' .

Cette construction très simple se prête à une généralisation assez facile de la manière suivante. Supposons que les arcs portés sur les deux courbes (X) et (Y) soient non plus égaux comme précédemment, mais dans un rapport constant, et qu'on divise la droite XY en Z dans le même rapport. On aura alors

$$(7) \quad \frac{s_x}{s_y} = \frac{\text{XZ}}{\text{ZY}} = k,$$

en désignant par s_x, s_y les arcs de deux courbes.

On reconnaît alors immédiatement que la tangente en Z, comme ci-dessus, a une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des tangentes en X et Y.

Quant à la détermination du centre de courbure, on remarquera que l'on a

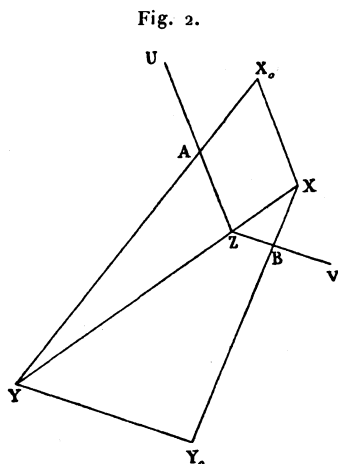
$$\begin{aligned} \text{XX}_0 &= \frac{i ds_x}{d\xi} \varepsilon\xi = \frac{ik ds_y}{d\xi} \varepsilon\xi, \\ \text{YY}_0 &= \frac{i ds_y}{d\eta} \varepsilon\eta, \\ \text{ZZ}_0 &= \frac{2k}{1+k} \frac{i ds_y}{d\xi + d\eta} (\varepsilon\xi + \varepsilon\eta); \end{aligned}$$

et, par un calcul tout à fait analogue à celui que nous avons in-

diqué plus haut,

$$(8) \quad (d\xi + d\eta)ZZ_0 - \frac{2 \cdot XX_0}{1+k} d\xi + \frac{2k \cdot YY_0}{1+k} d\eta.$$

Or, si par le point Z nous menons une parallèle ZA (*fig. 2*)



à XX_0 jusqu'à la rencontre de YX_0 , puis une parallèle ZB à YY_0 jusqu'à la rencontre de XY_0 , et si nous construisons

$$ZU = 2ZA, \quad ZV = 2ZB,$$

nous aurons

$$ZU = \frac{2 \cdot XX_0}{1+k}, \quad ZV = \frac{2k \cdot YY_0}{1+k}.$$

La relation (8) devient alors

$$(9) \quad (d\xi + d\eta)ZZ_0 = d\xi ZU + d\eta ZV,$$

c'est-à-dire que le centre de courbure en Z est situé sur la droite joignant les deux points U et V, dont nous venons d'indiquer la construction.