Bulletin de la S. M. F.

Béghin

Note sur le cercle de Joachimsthal

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 138-140.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__138_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Note sur le cercle de Joachimstahl; par M. Béghin.

Si d'un point P l'on mène les quatre normales à une ellipse et que l'on considère l'intersection des quatre cercles de Joachimstahl avec l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds de ces normales, on obtient, en dehors des pieds de ces quatre normales, quatre autres points, situés sur une ellipse de forme invariable, ayant son centre au point P, et ses axes parallèles à ceux de l'ellipse donnée.

Soient α, β les coordonnées du point P, et

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipse.

Un point quelconque de l'hyperbole équilatère peut être représenté par les équations

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + t},$$
$$y = \frac{b^2\beta}{b^2 + t}.$$

Les pieds des normales sont déterminés par

$$(1) \qquad \frac{a^2\alpha^2}{(a^2+t)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+t)^2} - 1 = \frac{-f(t)}{(a^2+t)^2(b^2+t)^2} = 0.$$

Désignons par t_1, t_2, t_3, t_4 les quatre racines de cette équation, par A_1, A_2, A_3, A_4 les points correspondants, et par θ_1 la valeur de t relative au quatrième point d'intersection B_1 du cercle passant par A_2, A_3, A_4. Le coefficient angulaire de la droite A_1B_1 doit être l'inverse de celui de A_3A_4 ; en effet, ces deux droites sont également inclinées sur les axes de l'hyperbole, puisqu'elles joignent quatre points situés sur une circonférence. Nous avons donc la condition

$$\frac{b^4\beta^2}{a^4\alpha^2}\,\frac{(a^2+t_2)(a^2+t_3)(a^2+t_4)(a^2+\theta_1)}{(b^2+t_2)(b^2+t_3)(b^2+t_4)(b^2+\theta_1)} = 1$$

ou

$$\frac{b^4\beta^2}{a^4\alpha^2}\,\frac{f(-a^2)}{f(-b^2)}\,\frac{(b^2+t_1)(a^2+\theta_1)}{(a^2+t_1)(b^2+\theta_1)} = 1,$$

en tenant compte de l'équation (1).

Or

$$f(-a^2) = -a^2\alpha^2c^4,$$
$$f(-b^2) = -b^2\beta^2c^4;$$

θ est donc donné en fonction de t par

$$\frac{b^2(a^2+\theta)}{a^2+t} = \frac{a^2(b^2+\theta)}{b^2+t} = -\theta,$$

d'où

$$\frac{1}{a^2+t} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a^2}{a^2+\theta} - 1\right),$$
$$\frac{1}{b^2+t} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{b^2+\theta} - 1\right),$$

et, en transportant ces valeurs dans (1), on obtient

$$\frac{a^2\alpha^2}{b^4}\left(\frac{a^2}{a^2+\theta}-1\right)^2+\frac{b^2\beta^2}{a^4}\left(\frac{b^2}{b^2+\theta}-1\right)^2-1=0.$$

Cette équation donne les quatre valeurs de θ relatives aux points B_1, B_2, B_3, B_4. On voit qu'ils sont situés sur l'ellipse

$$\frac{a^2\alpha^2}{b^4}\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)^2+\frac{b^2\beta^2}{a^4}\left(\frac{y}{\beta}-1\right)^2=1,$$

ayant son centre au point $P(\alpha, \beta)$ et ayant pour demi-axes $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$.