

BULLETIN DE LA S. M. F.

C. - A. LAISANT

Expression du produit des coefficients du binôme

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 140-141.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__140_1

© Bulletin de la S. M. F., 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Expression du produit des coefficients du binôme ;

par M. C.-A. LAISANT.

Les coefficients du développement $(1+x)^n$ sont, à l'exception des deux extrêmes, $c_0 = 1$, $c_n = 1$, représentés par les expressions

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdots \frac{n!}{(n-1)!1!}.$$

Le produit de tous les coefficients de ce développement est donc

$$P_n = \frac{(n!)^{n-1}}{[1!2!\dots(n-1)!]^2}.$$

Le numérateur peut s'écrire

$$2^{n-1}.3^{n-1}.4^{n-1}\dots(n-1)^{n-1}.n^{n-1},$$

et le dénominateur

$$2^{2n-2}.3^{2n-6}.4^{2n-8}\dots(n-1)^2.$$

Par conséquent,

$$P_n = 2^{-n+3}.3^{-n+5}.4^{-n+7}\dots(n-1)^{n-3}.n^{n-1},$$

ou, en groupant les termes qui ont des exposants égaux et de signes contraires,

$$P_n = \left(\frac{n}{1}\right)^{n-1} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{n-2}{3}\right)^{n-5} \dots$$

Si n est pair, le dernier facteur a pour exposant l'unité et est égal à $\frac{n}{2} + 1$; si n est impair, ce dernier facteur, égal à l'unité, a pour exposant zéro.

Dans ce dernier cas, il est évident que P_n est un carré.

Par exemple, le produit des coefficients de $(1+n)^6$, ou 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 est égal à $\left(\frac{6}{1}\right)^5 \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{4}{3}\right)$.

Le produit des coefficients 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 de $(1+n)^7$ est

$$\left(\frac{7}{1}\right)^6 \left(\frac{6}{2}\right)^4 \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Il résulte de l'expression même de P_n que l'on a, pour le rapport des deux produits se rapportant à des puissances consécutives,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$
