BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Expression du produit des coefficients du binôme

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 140-141.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__140_1>

Expression du produit des coefficients du binôme;
par M. C.-A. Laisant.

Les coefficients du développement $(1+x)^n$ sont, à l'exception des deux extrêmes, $c_0 = 1$, $c_n = 1$, représentés par les expressions

$$\frac{n!}{1!(n-1)!}\;\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdots\frac{n!}{(n-1)!1!}.$$

Le produit de tous les coefficients de ce développement est donc

$$P_n = \frac{(n!)^{n-1}}{[1!2!\ldots(n-1)!]^2}.$$

Le numérateur peut s'écrire

$$2^{n-1}.3^{n-1}.4^{n-1}\ldots(n-1)^{n-1}.n^{n-1},$$

et le dénominateur

$$2^{2n-4}.3^{2n-6}.4^{2n-8}\ldots(n-1)^2.$$

Par conséquent,

$$P_n = 2^{-n+3}.3^{-n+5}.4^{-n+7}\ldots(n-1)^{n-3}.n^{n-1},$$

ou, en groupant les termes qui ont des exposants égaux et de signes contraires,

$$P_n = \left(\frac{n}{1}\right)^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-3}\left(\frac{n-2}{3}\right)^{n-5}\cdots.$$

Si n est pair, le dernier facteur a pour exposant l'unité et est égal à $\frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}$; si n est impair, ce dernier facteur, égal à l'unité, a pour exposant zéro.

Dans ce dernier cas, il est évident que P_n est un carré.

Par exemple, le produit des coefficients de $(1+n)^6$, ou 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 est égal à $\left(\frac{6}{1}\right)^5 \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{4}{3}\right)$.

Le produit des coefficients 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 de $(1+n)^7$ est

$$\left(\frac{7}{1}\right)^6 \left(\frac{6}{2}\right)^4 \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Il résulte de l'expression même de P_n que l'on a, pour le rapport des deux produits se rapportant à des puissances consécutives,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$