

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Sur une transformation relative à la géométrie du triangle

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 133-135.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__133_0

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur une transformation relative à la géométrie du triangle;
par M. E. LEMOINE.

J'ai donné au Congrès de Limoges (*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1890) un grand nombre de formules se rapportant à la Géométrie du triangle. En appelant $a, b, c, A, B, C, r, r_a, r_b, r_c, R, p, \delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$ les trois côtés, les trois angles, les rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés, le rayon du cercle circonscrit, le demi-périmètre et les quatre quantités, $4R + r, 4R - r_a, 4R - r_b, 4R - r_c$, on a, par exemple,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r\delta) = 2[(p - a)^2 + r_a\delta_a],$$

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (\delta^2 - 2p^2)^2,$$

$$r^4 + r_b^2 + r_c^2 = [\delta_a^2 - 2(p - a)^2]^2,$$

$$\Sigma a^3 \cos A = \frac{4pr}{R} (p^2 - r\delta - 3R^2),$$

$$\Sigma a \cos^2 A = \delta - \frac{p^2(R - r)}{R^2},$$

$$-r \cos^2 A + r_c \cos^2 B + r_b \cos^2 C = \delta_a - \frac{(p - a)^2(R + r_a)}{R^2}, \quad \dots$$

L'emploi de ces formules facilite souvent la résolution de problèmes assez compliqués, et nous allons le montrer à propos de trois théorèmes qui, je crois, n'ont pas encore été remarqués.

THÉORÈME I. — *On donne deux cercles fixes de rayons R, r de centres O, o , tels qu'il y ait une infinité de triangles ABC inscrits au cercle de rayon R et circonscrits au cercle de rayon r ; le lieu des points de Lemoine K des triangles ABC est une ellipse.*

Posons $\varphi = OK, \varphi' = oK$; on sait que $\overline{Oo}^2 = d^2 = R(R - 2r)$.
On a

$$(1) \quad \varphi^2 = R^2 - \frac{12R^2r^2p^2}{(p^2 - r\delta)^2},$$

$$(2) \quad \varphi'^2 = 4Rr^2 \frac{p^2(R + r) - r\delta^2}{(p^2 - r\delta)^2}.$$

On établit facilement ces formules en se rappelant que si

$x, y, z; x_1, y_1, z_1$ sont les coordonnées normales absolues de deux points M et M', on a

$$\overline{MM'}^2 = -\frac{R}{pr} \Sigma a(y_1 - y)(z_1 - z),$$

en employant des identités du genre de celles dont nous venons de signaler l'utilité.

En éliminant p^2 entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3) \quad 1 = \frac{4r[(R+r)(R^2 - \rho^2) - 3R\rho'^2]}{3(R^2 - \rho^2 + \rho'^2)}.$$

C'est l'équation du lieu de K en coordonnées ρ, ρ', O et o étant les pôles.

Si nous prenons pour axe des x la droite Oo , pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de Oo , l'abscisse de o étant $\frac{d}{2}$, on a

$$\rho^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}d + x\right)^2, \quad \rho'^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}d - x\right)^2;$$

substituant dans l'équation (3), on trouve, tous calculs faits,

$$4x^2(3R^2 - 2Rr + r^2) + 4y^2r\delta - 4dx(3R - r)(R + r) + d^2(3R^2 + 6Rr + r^2) = 0 :$$

le lieu du point K est donc une ellipse.

Le carré du demi grand axe est dirigé suivant la direction de l'axe des y et a pour valeur

$$\frac{d^4 r}{\delta(3R^2 - 2Rr + r^2)}.$$

Le demi petit axe a pour valeur

$$\frac{d^2 r}{3R^2 - 2Rr + r^2}.$$

Si nous donnions au lieu de o le centre o_a du cercle ex-inscrit tangent à BC, on aurait de même

$$\begin{aligned} \rho &= OK, & \rho' &= o_a K, \\ \rho^2 &= R^2 - \frac{12R^2 r_a^2 (p - a)^2}{[(p - a)^2 + r_a \delta_a]^2}, \\ \rho'^2 &= 4Rr_a \frac{(p - a)^2 (R - r_a) + r_a \delta_a^2}{[(p - a)^2 + r_a \delta_a]^2}, \end{aligned}$$

en éliminant $p - a$, on trouverait l'équation du lieu de K , qui est une hyperbole.

Cette hyperbole est équilatère si $R = 2r_a$.

THÉORÈME II. — *Avec les mêmes données le lieu du point de Gergonne du cercle inscrit du triangle ABC est une circonférence.*

Soit λ le point de *Gergonne* d'un des triangles ABC.

On trouvera, après quelques calculs,

$$\begin{aligned} \overline{o\lambda}^2 &= \rho'^2 = \frac{r^2}{\delta^2} (\delta^2 - 3p^2), \\ \overline{O\lambda}^2 &= \rho^2 = R^2 - \frac{4r(R+r)}{\delta^2} p^2; \end{aligned}$$

éliminant p on trouve une circonférence.

Si l'on donnait, au lieu du cercle inscrit, le cercle ex-inscrit o_a tangent au côté BC, on trouverait encore une circonférence pour le lieu du point de *Gergonne* de ce cercle ex-inscrit.

THÉORÈME III. — *Le point de Nagel N décrit dans les mêmes conditions une circonférence.*

Il suffit, pour le voir, de calculer la distance NO du point N de *Nagel* au centre O du cercle circonscrit; on trouve

$$R - 2r,$$

expression remarquable en elle-même par sa simplicité.

La même méthode s'applique avec succès pour trouver les lieux, trop connus pour nous y arrêter, de l'orthocentre, du centre de gravité, etc.

Remarquons encore ce théorème, dont la démonstration est presque intuitive :

Si O et o sont donnés, les centres des cercles ex-inscrits à tous les triangles ABC décrivent la circonférence de rayon $2R$ et de centre O_2 sur Oo , tel que $oO_2 = 2oO$; si O et o_a sont donnés, les centres o, o_b, o_c des autres cercles tangents aux trois côtés d'un des triangles ABC décrivent la circonférence de rayon $2R$ et de centre O_{2a} sur Oo_a , tel que $o_aO_{2a} = 2o_aO$.