

# BULLETIN DE LA S. M. F.

C. - A. LAISANT

## **Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 19 (1891), p. 142-144.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1891\\_\\_19\\_\\_142\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__142_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques;*  
par M. C.-A. LAISANT.

1. Une équation réciproque est, comme on le sait, celle dont le premier membre se compose d'un polynôme entier où les termes équidistants des extrêmes sont égaux. En appelant  $m$  le degré de ce polynôme  $f(x)$ , il s'ensuit que

$$(1) \quad f(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous pouvons prendre cette relation (1) comme définition et appeler *fonction réciproque de degré  $m$*  toute fonction qui y satisfait.

On remarquera que  $ax^m$  peut toujours être regardée, en vertu de cette définition, comme une fonction réciproque de degré  $2m$ .

2. Si nous formons successivement les dérivées première et seconde des deux membres de l'équation (1), nous aurons

$$(2) \quad f'(x) = mx^{m-1}f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f''(x) = m(m-1)x^{m-2}f\left(\frac{1}{x}\right) \\ \quad - 2(m-1)x^{m-3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + x^{m-4}f''\left(\frac{1}{x}\right). \end{array} \right.$$

Posons

$$(4) \quad \varphi(x) = (m-1)f'(x) - xf''(x).$$

Il viendra, en vertu des relations (2) et (3),

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = (m-1)x^{m-2}f'\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-3}f''\left(\frac{1}{x}\right) \\ \quad = x^{m-2} \left[ (m-1)f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f''\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ \quad = x^{m-2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right). \end{array} \right.$$

Par conséquent,  $f(x)$  étant réciproque de degré  $m$ , la fonction  $\varphi(x)$  ou  $(m-1)f'(x) - x f''(x)$  est réciproque de degré  $m-2$ .

En appliquant ce résultat à la fonction  $\varphi(x)$  elle-même, on reconnaît sans peine que la fonction

$$(m-2)(m-3)f''(x) - 2(m-3)x f'''(x) + x^2 f^{(4)}(x)$$

est réciproque de degré  $m-4$ . De même, la fonction

$$(m-3)(m-4)(m-5)f'''(x) - 3(m-4)(m-5)x f^{(4)}(x) + 3(m-5)x^2 f^{(5)}(x) - x^3 f^{(6)}(x)$$

est réciproque de degré  $m-6$ , et il est facile de généraliser.

3. Les propriétés qui suivent sont pour ainsi dire évidentes, en vertu de l'équation de définition (1), et il suffira de les énoncer.

1° Si deux fonctions  $f(x)$ ,  $F(x)$  sont réciproques de même degré  $m$ , la fonction  $A f(x) + B F(x)$ ,  $A$  et  $B$  étant deux constantes quelconques, est réciproque de même degré.

2° Si  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  sont des fonctions réciproques de degrés  $m_1$  et  $m_2$  respectivement, la fonction  $f_1(x) \times f_2(x)$  est réciproque de degré  $m_1 + m_2$ .

3° Dans la même hypothèse, la fonction  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$  est réciproque de degré  $m_1 - m_2$ .

4°  $f(x)$  étant une fonction réciproque de degré  $m$ ,  $[f(x)]^p$  est une fonction réciproque de degré  $mp$ .

4. D'après la définition adoptée ci-dessus, une fonction  $f(x)$  est réciproque de degré zéro, quand on a

$$(6) \quad f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part, nous pouvons écrire la relation (1) de définition sous la forme

$$\frac{f(x)}{x^{\frac{m}{2}}} = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{2}}}.$$

Par conséquent, si  $f(x)$  est réciproque de degré  $m$ , la fonction  $f(x) : x^{\frac{m}{2}}$  sera réciproque de degré zéro.

En écrivant  $f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $f(x)$  étant une fonction quelconque, on obtient nécessairement une fonction réciproque de degré zéro.

Il en est de même si l'on forme  $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$ .

Les propriétés du n° 2 ci-dessus se simplifient quand on considère des fonctions réciproques de degré zéro. La relation (4) nous donne, en effet,

$$-\varphi(x) = f'(x) + x f''(x).$$

Cette fonction est donc réciproque de degré  $-2$ , lorsque  $f(x)$  est réciproque de degré zéro; et, par suite,

$$x f'(x) + x^2 f''(x)$$

est réciproque de degré zéro.

On voit de même que

$$x^2 f''(x) + x^3 f'''(x) + \frac{x^4}{2 \cdot 3} f^{(4)}(x),$$

$$x^3 f'''(x) + x^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{4} x^5 f^{(5)}(x) + \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5} f^{(6)}(x)$$

sont également des fonctions réciproques de degré zéro.

En combinant ces trois fonctions par l'addition de la première et de la troisième, et la soustraction de la seconde, on a

$$x f'(x) + \frac{5}{6} x^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{4} x^5 f^{(5)}(x) + \frac{1}{60} x^6 f^{(6)}(x),$$

qui jouit aussi de la même propriété.