

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VICAIRE

Sur les sections circulaires du Tore

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 46-48.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__46_1

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

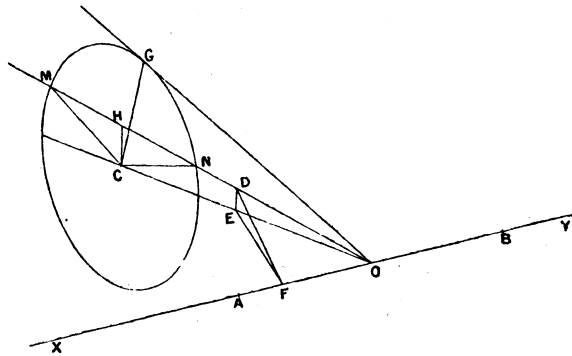
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les sections circulaires du tore; par M. E. VICAIRE.

Yvon Villarceau a découvert par l'analyse la propriété remar-

Fig. 1.



quable que possèdent les plans bitangents au tore de donner des sections circulaires.

MM. Rouché et de Comberousse, dans leur *Traité de Géomé-*

trie, ont donné de ce théorème une démonstration synthétique qui ne laisse pas que d'être un peu compliquée. Puisqu'il a pénétré ainsi dans la Géométrie classique, peut-être qu'une démonstration plus simple offrira quelque intérêt.

Soient :

O le centre de tore ;

C celui d'une section méridienne quelconque ;

XOY la trace sur le plan de l'équateur d'un plan sécant qui rencontre cette section aux points M et N.

Dans les triangles MCO, NCO, qui ont l'un et l'autre pour côtés le rayon r du méridien et le rayon $OC = d$ du cercle moyen, on a

$$\frac{\sin M}{\sin MOC} = \frac{\sin N}{\sin MOC} = \frac{d}{r}.$$

Dans les trièdres OXCM, OYCM, rectangles suivant l'arête OC, on a

$$\frac{\sin MOX}{\sin MOC} = \frac{\sin MOY}{\sin MOC} = \frac{1}{\sin \varphi},$$

en désignant par φ l'angle sous lequel le plan sécant XOM rencontre le plan de l'équateur.

Or, si ce plan sécant est le plan bitangent, on a précisément $\sin \varphi = \frac{r}{d}$. Donc les angles M et N, supplémentaires l'un de l'autre, sont respectivement égaux à MOX et à MOY.

Si, pour fixer les idées, MOX est aigu, il sera égal à M, et MOY sera égal à N.

Cela étant, portons sur XY, de part et d'autre du point O, les longueurs $OA = OB = r$; les triangles MOA, NOB sont respectivement égaux à OMC et à ONC, et leurs côtés MA et NB sont l'un et l'autre égaux à OC, ce qui démontre le théorème.

On peut aisément, pour être tout à fait classique, éviter l'emploi de la Trigonométrie.

D'un point D, pris arbitrairement sur OM, abaissons les perpendiculaires DE, DF sur OC et sur OX; l'angle DFE = φ est, pour le plan bitangent, égal à l'angle COG, formé avec OC par la tangente au méridien, et les triangles rectangles semblables COG,

DFE donnent

$$\frac{DE}{DF} = \frac{r}{d}.$$

D'autre part, H étant le milieu de MN, les triangles rectangles semblables CHO, DEO donnent

$$\frac{CH}{DE} = \frac{d}{DO}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{CH}{DF} = \frac{r}{DO},$$

ce qui démontre la similitude des triangles rectangles MCH, ODF, et par conséquent l'égalité des angles O et M, d'où le reste de la démonstration.
