C.-A. Laisant

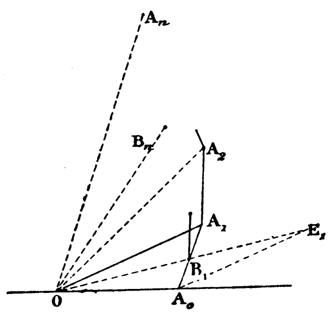
Propriété géométrique des coefficients du binôme

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 4-5.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__4_0>

Propriété géométrique des coefficients du binôme ;
par M. C.-A. Laisant.

On sait qu'on appelle *myosotis* la figure formée par une série de triangles directement semblables OA_0A_1, OA_1A_2, ... accolés successivement les uns aux autres. Nous appellerons le premier de ces triangles OA_0A_1 *base* du myosotis.

Soit un myosotis $OA_0A_1 \ldots A_n$ composé de n triangles. Appli-



quons aux sommets A_0, A_1, ..., A_n des masses proportionnelles aux coefficients $1 = C_0$, C_1, ..., $C_n = 1$ du développement de $(x+1)^n$; et proposons-nous de trouver le barycentre de ce système.

Si nous prenons OA_0 pour unité, et si nous posons $OA_1 = \text{a}$, nous avons $OA_2 = \text{a}^2$, $OA_3 = \text{a}^3$, ..., $OA_n = \text{a}^n$, et, par conséquent, le barycentre cherché K est donné par

$$\begin{aligned} OK = \text{k} &= \frac{C_0 + C_1\text{a} + C_2\text{a}^2 + \ldots + C_n\text{a}^n}{C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n} \\ &= \frac{(1+\text{a})^n}{2^n} = \left(\frac{1+\text{a}}{2}\right)^n = \text{b}^n = OB_1^n, \end{aligned}$$

en désignant par B_1 le milieu de A_0A_1.

Si donc nous construisons le myosotis $OA_0B_1B_2 \ldots B_n$, de base OA_0B_1, le sommet B_n sera le barycentre cherché.

Il est évident, d'après cela, que l'angle B_nOA_0 est égal à n fois l'angle B_1OA_0. Quand le triangle de base OA_0A_1 est isoscèle, tous les points A_0, A_1, ... sont sur une même circonférence ; et alors OB_n est la bissectrice de A_nOA_0.

Quand le triangle OA_0B_1 est isoscèle, le barycentre est sur la circonférence de centre O et de rayon OA_0.

Si l'on prolonge les droites OA_1, OA_2, ..., OA_n, de telle sorte qu'on ait $OD_1 = C_1 OA_1 = \ldots$, $OD_n = C_n OA_n = OA_n$, il sera aisé de trouver le centre des moyennes distances L des points A_0, D_1, D_2, ..., D_{n-1}, A_n. En effet, on aura

$$(n+1)L = C_0 A + C_1 A^2 + \ldots + C_n A^n = (1+A)^n.$$

Si nous prolongeons OB_1 en $OE_1 = 2OB_1$ et si nous construisons le myosotis de base OA_0E_1, c'est-à-dire $OA_0E_1E_2\ldots E_n$, on aura, par conséquent, $OL = \dfrac{OE_n}{n+1}$.

Si, enfin, nous construisons $OF_1 = \dfrac{OA_1}{C_1}$, $OF_2 = \dfrac{OA_2}{C_2}$, ..., $OF_n = \dfrac{OA_n}{C_n} = OA_n$, et, si nous appliquons en A_0, F_1, F_2, ..., A_n, des masses proportionnelles aux carrés des coefficients C_0^2, C_1^2, ..., C_n^2, le barycentre G de ce système sera donné par la relation

$$\frac{(2n)!}{n!\,n!}OG = (1+A)^n = OE_n, \qquad OG = \frac{n!\,n!}{(2n)!}OF$$

On peut remarquer que $OE_n = 2^n OB_n$.