BULLETIN DE LA S. M. F.

ABEL TRANSON

Une lettre

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 104-106.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__104_0>

Une lettre d'Abel Transon.

La lettre qu'on va lire a été communiquée, à la Société, par M. C.-A. Laisant, qui s'est exprimé ainsi :

En feuilletant de vieilles notes, ces jours derniers, je viens de retrouver une lettre d'Abel Transon, lettre que j'eus l'honneur de recevoir de lui à l'époque où il publiait, dans les *Nouvelles Annales,* ses articles si remarquables sur le *Calcul directif,* c'est-à-dire en 1868.

Cette lettre est, en quelque sorte, un complément et un commentaire de la série des articles dont il s'agit; à ce titre, elle peut présenter un réel intérêt, au point de vue de l'histoire et de la doctrine des imaginaires. C'est ce qui m'a déterminé à la reproduire et à la communiquer à la Société mathématique de France.

On y retrouvera les qualités de clarté et de netteté philosophique qui caractérisaient ce grand esprit.

« Paris, 29 juin 1868.

» Vous avez bien raison de voir une analogie étroite entre les *Clefs* de M. Cauchy et les *Nombres directifs* d'Argand-Français-Mourey. Toutefois, le nombre directif correspond essentiellement à une *ligne unique* dont la longueur est mesurée par le *module* et la direction par l'*argument.* Ce nombre peut être remplacé par la ligne brisée à termes trigonométriques ou par toute autre ligne brisée terminée aux mêmes extrémités. Mais il y a un grand avantage à avoir *impliqué* dans une seule lettre la grandeur et la direction, au lieu de les expliciter en deux termes distincts. C'est un point tout à fait capital qui caractérise la doctrine de l'Algèbre directive; et, à vrai dire, je ne suis pas bien certain que M. Cauchy ait accepté aussi nettement que le supposent MM. Briot et Bouquet cette représentation du nombre imaginaire par un chemin oblique.

» Vous verrez, dans les articles que j'ai publiés, de nombreux exemples qui établissent l'avantage de cette conception. En voici un que je regrette d'avoir omis, car il est aussi simple que décisif.

» Si l'on fait le produit directif de plusieurs unités dirigées respectivement sous les inclinaisons a, b, c, ... et représentées par 1_a, 1_b, 1_c, ..., on a, d'après la règle de la multiplication, la valeur du produit donnée par

$$1_a 1_b 1_c \ldots = 1_{a+b+c+\ldots}.$$

Or, en remplaçant maintenant chaque unité inclinée par une ligne brisée en cosinus et sinus, on a immédiatement le théorème de Moivre

$$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)\ldots = \cos(a + b + \ldots) + i\sin(a + b + \ldots).$$

» Ensuite, il est bien vrai aussi qu'en considérant essentiellement le nombre dit *imaginaire,* sous sa forme usuelle $a + b\sqrt{-1}$; considérant, en outre, a et b comme une ordonnée et une abscisse, et, par suite, ce nombre comme déterminant, à la façon de Descartes, un point quelconque du plan; il est bien vrai, dis-je, qu'on est naturellement conduit à se demander si l'addition d'un nouveau terme affecté d'un nouveau coefficient de perpendicularité ne conduira pas à un point hors du plan, à un point quelconque de l'espace. Cette extension, que vous avez bien aperçue, est, comme vous le savez aussi, le principe de la théorie des quaternions de M. Hamilton. Sans avoir imaginé cette théorie, les inventeurs du calcul directif, Argand, Français et Mourey, eux aussi, ont entrevu une extension de la doctrine à une certaine Géométrie de l'espace.

» Pour moi, j'ai voulu, dans l'exposition du calcul directif, écarter complètement ce point de vue. J'ai voulu montrer que le *chemin incliné sur le plan* réalise le symbole imaginaire de l'Algèbre; et qu'ainsi tous les nombres requis par les nécessités du calcul, le nombre fractionnaire, le nombre positif et le nombre négatif, et enfin le nombre dit *imaginaire* sont procurés à l'Algèbre par la Géométrie, avec le même caractère de nécessité!... Résultat très important à nos yeux, parce qu'il en doit suivre une réforme dans l'enseignement de l'Algèbre. Et à ceux qui m'ont souvent objecté : mais pourquoi ne sortez-vous pas du plan? je répondais : ce n'est pas la Géométrie à trois dimensions qui est en souffrance, qui a des symboles imaginaires, inexpliqués; c'est l'Algèbre. Donc, quand la Géométrie vient au secours de l'Algèbre pour combler une lacune, l'Algèbre serait mal venue de répondre à la Géométrie : Construisez *d'abord* des symboles applicables à l'espace; c'est alors seulement que j'examinerai si, comme vous le dites, il y a vraiment des nombres dont le carré soit négatif, cê que j'ai toujours nié jusqu'ici....

» En d'autres termes, le nouveau symbole de perpendicularité nécessaire pour sortir du plan me paraît une invention, nullement dénuée d'utilité et d'opportunité sans doute ; mais aussi, inévitablement marquée de quelque arbitraire. Or, je tenais précisément à établir que la correspondance du chemin incliné de la Géométrie avec le symbole imaginaire des algébristes est aussi naturelle que la correspondance de la divisibilité indéfinie des grandeurs linéaires avec la génération du nombre fractionnaire ; ou aussi naturelle que la correspondance des deux chemins opposés de la Géométrie cartésienne avec les nombres dits *positifs* et *négatifs* de l'Algèbre.

» Pour m'éclairer complètement à ce sujet, pendant que je composais la série des articles des *Nouvelles Annales,* je me suis procuré une Thèse de M. Allégret sur les quaternions. Sans m'être assimilé la théorie, qui n'est peut-être pas exposée dans cette thèse d'une façon bien lucide, j'en ai vu assez pour, d'une part, me confirmer dans l'opinion ci-dessus, et me décider à ne faire aucune mention des quaternions à l'occasion de *la vraie théorie des quantités dites imaginaires*. Mais j'ai vu, en même temps, que cette théorie des quaternions avait déjà donné des résultats intéressants et, tout au moins, des expressions nouvelles de propriétés déjà connues de la Géométrie des lignes et des surfaces.

» Ainsi, bien loin de vous détourner de cette étude, je ne crains pas d'exprimer la conviction que cette théorie pourra donner des résultats vraiment nouveaux. N'est-il pas évident que, si l'on peut impliquer dans une seule lettre la grandeur et la direction d'un chemin oblique de l'espace, c'est-à-dire représenter par une seule lettre la fonction dite *quaternion,* sauf à procéder tout le calcul qui dérive de cette théorie, une équation entre deux variables suffira pour exprimer dans l'espace des lois de transformation des figures ?...

» ABEL TRANSON. »