BULLETIN DE LA S. M. F.

FÉLIX LUCAS

Sur les polygones inscrits dans les coniques

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 33-34.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__33_0>

Sur les polygones inscrits dans les coniques;
par M. Félix Lucas.

Le nombre de points nécessaire et suffisant pour déterminer une courbe algébrique du degré p est $\frac{p(p+3)}{2}$. Les p^2 points d'intersection de deux courbes du degré p forment les pivots d'une courbe mobile, du même degré, que l'on peut faire passer par un point quelconque du plan; si p est supérieur à 2, les p^2 pivots ne sont pas tous arbitraires. Il suffit de donner

$$\frac{p(p+3)}{2} - 1 = \frac{p^2+3p-2}{2}$$

d'entre eux pour déterminer les $\frac{p^2-3p+2}{2}$ autres.

Cela posé, considérons un polygone de $2p$ côtés ($p > 2$), inscrit dans une conique. Le système des p côtés de rang impair et celui des p côtés de rang pair forment deux courbes du degré p. Ces courbes se coupent en p^2 points ou pivots, comprenant les $2p$ sommets situés sur la conique donnée, et $p(p-2)$ autres points.

Pour déterminer ces p^2 pivots, il suffit d'en donner $\frac{p^2+3p-2}{2}$, soit les $2p$ sommets du polygone avec $\frac{p^2-p-2}{2}$ autres pivots. Ce dernier nombre, qui peut aussi s'écrire $\frac{(p-2)(p+1)}{2}$, est exactement égal au nombre des points qui déterminent une courbe du degré $(p-2)$. Cette courbe et la conique donnée constituent ensemble une pivotante du degré p qui doit passer par les $\frac{p^2-3p+2}{2}$ pivots restants. Par conséquent :

Lorsqu'un polygone de $2p$ côtés est inscrit dans une conique, ses côtés de rang impair coupent ses côtés de rang pair en $p(p-2)$ points, qui appartiennent à une courbe du degré $(p-2)$.

En faisant $p = 3$, on obtient le théorème de Pascal relatif à l'hexagone inscrit. Les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

En faisant $p = 4$, on obtient le théorème suivant :

Les huit côtés d'un octogone inscrit dans une conique forment un octogone inscrit dans une autre conique.

Si le premier octogone est convexe, le second octogone est étoilé. Les côtés successifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de l'un des octogones prennent, dans l'autre octogone, les rangs 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6.

En faisant $p = 5$, on obtient le théorème suivant :

Les côtés de rang impair d'un décagone inscrit dans une conique coupent ses côtés de rang pair en quinze points situés sur une courbe du troisième degré.

En faisant $p = 6$, on voit que :

Les côtés de rang impair d'un dodécagone inscrit dans une conique coupent ses côtés de rang pair en vingt-quatre points situés sur une courbe du quatrième degré.

En supposant que les côtés de rang pair d'un polygone de $2p$ côtés inscrit dans une conique deviennent infiniment petits, on obtient le théorème suivant :

Lorsqu'un polygone de p côtés est inscrit dans une conique, les tangentes à la conique, menées par les sommets de ce polygone, coupent ses côtés en $p(p-2)$ points, qui appartiennent à une courbe du degré $(p-2)$.

Le triangle inscrit donne ainsi trois points en ligne droite; le quadrilatère inscrit donne huit points situés sur une conique; le pentagone inscrit donne quinze points sur une cubique; l'hexagone inscrit donne vingt-quatre points sur une quartique, etc.

En transformant les figures par la méthode des polaires réciproques, on obtiendra les théorèmes corrélatifs concernant les polygones circonscrits aux coniques.