BULLETIN DE LA S. M. F.

FÉLIX LUCAS

Propriétés d’un système de points dans un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 109-112.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__109_1>

Propriétés d'un système de points dans un plan;
par M. Félix Lucas.

Considérons dans le plan un système quelconque de p points M, ayant pour affixes les racines de l'équation

$$(1)\qquad F(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p) = 0.$$

Points centraux. — Les *points centraux* C de ce système sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre, en présence d'attractions inversement proportionnelles aux distances exercées par les points M doués de l'unité de masse. Ce sont les points racines de l'équation dérivée

$$(2)\qquad F'(z) = p(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)\ldots(z - \gamma_{p-1}) = 0.$$

On a identiquement

$$(3)\qquad F_m(z_m) = \left[\frac{F(z)}{z - z_m}\right]_{z=z_m} = F'(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(4)\qquad F_1(z_1)\,F_2(z_2)\ldots F_p(z_p) = F'(z_1)\,F'(z_2)\ldots F'(z_p).$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$\prod \overline{M_m M_n}^2 = p^p \prod \overline{M_m C_n},$$

c'est-à-dire que *le produit des carrés des distances mutuelles d'un système de p points* M *est égal à* p^p *fois le produit des distances de ces points* M *à leurs points centraux* C.

Dans le cas particulier où les points M occupent les sommets d'un polygone régulier de rayon R, tous les points C occupent le centre de ce polygone; on voit ainsi que *le produit des carrés des distances mutuelles des p sommets d'un polygone régulier de rayon* R *est égal à* $p^p R^{p(p-1)}$. Ce théorème s'exprime par la formule trigonométrique

$$(5) \qquad \prod_{m=1}^{m=p-1} \sin \frac{m\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Conjugués d'un point quelconque S. — Considérons maintenant, en présence des points M, un point quelconque S du plan et soit σ son affixe. Les *conjugués* P de ce point, relativement au système M, sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux de rester en équilibre en présence des attractions des points M ayant l'unité de masse et de la répulsion du point S ayant la masse p. Ces conjugués de S sont les points racines de l'équation du degré $p - 1$

$$p\,F(z) - (z - \sigma)\,F'(z) = 0.$$

Le coefficient du terme du plus haut degré, c'est-à-dire le coefficient de z^{p-1}, est $p(\sigma - \gamma)$, en désignant par γ l'affixe du centre des moyennes distances C des points donnés. On peut donc déterminer les affixes des conjugués de S, en égalant à zéro le polynôme

$$(6) \quad \varphi(z) = \frac{p\,F(z) - (z - \sigma)\,F'(z)}{p(\sigma - \gamma)} = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)\dots(z - \zeta_{p-1}).$$

Cela posé, on a identiquement

$$(7) \qquad p(\sigma - \gamma)\,\varphi(z_m) = (\sigma - z_m)\,F'(z_m) = (\sigma - z_m)\,F_m(z_m)$$

et, par conséquent,

$$(8)\qquad p^p\frac{\varphi(z_1)\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_p)}{F_1(z_1)F_2(z_2)\ldots F_p(z_p)}=\frac{(\sigma-z_1)(\sigma-z_2)\ldots(\sigma-z_p)}{(\sigma-\gamma)^p}.$$

En prenant les modules des deux membres, on trouve

$$(9)\qquad p^p\frac{\prod\overline{M_m P_n}}{\prod\overline{M_m M_n}^2}=\frac{\prod\overline{SM_m}}{\overline{SG}^p};$$

c'est-à-dire que *le produit des distances des points* M *aux conjugués* P *du point* S, *multiplié par* p^p *et divisé par le produit des carrés des distances des points* M, *est égal au produit des distances du point* S *aux points* M, *divisé par la* $p^{\text{ième}}$ *puissance de la distance de ce point* S *au centre des moyennes distances* G *de ces points* M.

Dans le cas particulier où les points M occupent les p sommets d'un polygone régulier de rayon R, et où le point S est pris sur la circonférence circonscrite à ce polygone, la distance SG est égale a R et, en vertu d'un théorème précédent, le produit des carrés des distances des points M est égal à $p^p R^{p(p-1)}$. La formule (9) devient alors

$$(10)\qquad \prod_{m=1}^{m=p}\prod_{n=1}^{n=p-1}\overline{M_m P_n}=R^{p(p-2)}\prod_{m=1}^{m=p}\overline{M_m S}.$$

En prenant le point G pour origine des coordonnées et la droite GM_1 pour axe des x, on a

$$(11)\qquad F(z)=z^p\quad-R^p$$

et

$$(12)\qquad \varphi(z)=z^{p-1}-\frac{R^p}{\sigma}.$$

Le module de σ est égal à R; nous pouvons supposer le point S placé entre M_p et M_1, et représenter son argument par -2ω, en désignant par ω un angle positif inférieur à $\frac{\pi}{p}\cdot$ L'équation (12) devient alors

$$(13)\qquad \varphi(z)=z^{p-1}-R^{p-1}e^{2\omega i};$$

elle montre, en supposant $p > 3$, que les conjugués P de S occupent les $(p-1)$ sommets d'un polygone régulier de même rayon R que celui des points M. On trouve un de ces points P et un seul sur chacun des arcs $M_m M_{m+1}$, parmi lesquels ne figure pas l'arc $M_p M_1$ qui contient le point S. Le rayon GP_1, correspondant au point situé sur l'arc $M_1 M_2$, fait avec GM_1 l'angle $\frac{2\omega}{p-1}\cdot$ On a, par suite, aux signes près,

$$(14)\qquad \begin{cases} M_m S \ = 2R \sin\left[\dfrac{(m-1)\pi}{p} + \omega\right], \\ M_m P_n = 2R \sin\left[\dfrac{(m-1)\pi}{p} - \dfrac{(n-1)\pi + \omega}{p-1}\right], \end{cases}$$

en sorte que la formule (10) devient, en faisant $R = 1$,

$$(15)\qquad \prod_{m=1}^{m=p} \prod_{n=1}^{n=p-1} \sin\left[\frac{(m-1)\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi+\omega}{p-1}\right] = \frac{1}{2^{p(p-2)}} \prod_{m=1}^{m=p} \sin\left[\frac{(m-1)\pi}{p} + \omega\right]$$

On en déduit, pour $\omega = 0$,

$$(16)\qquad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin\left(\frac{m\pi}{p} + \frac{n\pi}{p-1}\right) = \frac{(-1)^p (p-1)}{2^{p(p-2)}} \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{n=p-2} \sin \dfrac{n\pi}{p-1}}.$$

d'où, en tenant compte de la formule (5) dans laquelle on remplace m par n et p par $p-1$,

$$(17)\qquad \prod_{m=1}^{m=p-1} \prod_{n=1}^{n=p-2} \sin\left(\frac{m\pi}{p} - \frac{n\pi}{p-1}\right) = \frac{(-1)^p}{2^{(p-1)(p-2)}}.$$