

# BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

## Vie de la société

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 21 (1893), p. 128-134.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1893\\_\\_21\\_\\_128\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__128_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

### *Élections :*

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Henri Fleury, présenté par MM. Delannoy et D. André; M. Lecornu, présenté par MM. Haton de la Goupillière et L. Lévy; M. Gaston Martin et M. Amédée Wagner, présentés par MM. Laisant et d'Ocagne.

### *Communications :*

M. Guyou : *Sur les équations du clapotis.*

M. Kœnigs : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Kœnigs : *Sur les aires des podaires d'une courbe fermée convexe et de sa développée, prises par rapport au même point.*

M. Humbert : *Sur les surfaces représentables point par point sur le plan.*

M. Humbert : *Sur les courbes algébriques tracées sur les surfaces algébriques.*

M. Touche fait la Communication suivante :

*Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique.*

Pour établir l'équation de continuité en Hydraulique, on considère un petit parallélépipède rectangle MCFBAEGD dont le sommet est M.

Soit  $v_1$  la vitesse en M de la trajectoire fluide qui passe par ce point à l'instant  $t$ . Appelons P le plan osculateur de cette trajectoire et P' un plan perpendiculaire au plan P et passant par le premier élément de trajectoire.

Appelons  $s$  une longueur de trajectoire comptée à partir du point M,  $s'$  une longueur comptée à partir du même point, sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et tangente à leurs plans osculateurs,  $s''$  une longueur comptée sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et normale à leurs plans osculateurs;  $ds$  sera un élément de trajectoire,  $ds'$  un élément de normale principale à la trajectoire et  $ds''$  un élément de binormale.

Soient  $a, a', a''$  les cosinus directeurs de  $ds$ ;  $b, b', b''$  ceux de  $ds'$ , et  $c, c', c''$  ceux de  $ds''$ .

Nous nous proposons de développer les trois derniers termes de l'équation de continuité. Pour cela, nous commençons par y remplacer  $u, v$  et  $w$  par leurs valeurs en fonction de  $v_1, a, a', a''$ . Pour développer le premier terme du trinôme ainsi obtenu, nous considérons le plan P qui contient l'élément  $ds$ ; nous abaissons, du sommet A du petit parallélépipède, une perpendiculaire sur le plan P. Du pied de cette perpendiculaire, nous abaissons dans le plan P une perpendiculaire sur  $ds$ . Nous faisons une transformation de coordonnées; nous avons les axes coordonnés suivant MA, MB, MC; après la transformation, nous les avons suivant  $ds, ds'$  et  $ds''$ . Alors, en remarquant que l'on a  $\frac{ds}{dx} = a, \frac{ds'}{dx} = b, \frac{ds''}{dx} = c$ , nous obtenons

$$a^2 v_1 \frac{d\rho}{ds} + ab v_1 \frac{d\rho}{ds'} + ac v_1 \frac{d\rho}{ds''}$$

pour la dérivée de  $\rho av_1$ , par rapport à  $x$  en ne faisant varier que  $\rho$ . Nous obtenons de même la dérivée de  $\rho av_1$ , par rapport à  $x$  en ne

faisant varier que  $\nu_1$ , puis sa dérivée en ne faisant varier que  $a$ . Cette dernière dérivée contient  $\frac{da}{ds'}$  et  $\frac{da}{ds''}$  que nous allons remplacer par d'autres quantités.

A partir du point M, considérons l'élément  $ds'$ ; au point M l'élément de trajectoire est  $ds$ ; soit  $d\sigma$  l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de  $ds'$ ; projetons ce dernier élément sur le plan P; appelons  $\delta\alpha$  l'angle formé par cette projection avec l'élément  $ds$  et  $\delta\beta$  l'angle formé par l'élément  $d\sigma$  avec sa projection sur le plan P.

A partir du même point M, considérons l'élément  $ds''$ ; au point M l'élément de trajectoire est  $ds$ ; soit  $d\sigma'$  l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de  $ds''$ ; projetons ce dernier élément sur le plan P'; appelons  $\delta'\alpha$  l'angle formé par cette projection avec l'élément  $ds$  et  $\delta'\beta'$  l'angle formé par l'élément  $d\sigma'$  avec sa projection sur le plan P'.

La considération de triangles sphériques nous donne

$$\begin{aligned}\frac{da}{ds'} &= -b \frac{\delta\alpha}{ds'} - c \frac{\delta\beta}{ds'}, \\ \frac{da}{ds''} &= -c \frac{\delta'\alpha}{ds''} - b \frac{\delta'\beta'}{ds''}.\end{aligned}$$

Nous remplaçons  $\frac{da}{ds'}$  et  $\frac{da}{ds''}$  par ces valeurs dans la dernière dérivée partielle considérée.

Pour développer le deuxième terme du trinôme, nous considérons toujours le plan P qui contient l'élément  $ds$ ; mais, au lieu de considérer, comme précédemment, le sommet A du petit parallélépipède, nous considérons le sommet B. De ce sommet, nous abaissons une perpendiculaire sur le plan P; du pied de cette perpendiculaire, nous abaissons dans le plan P une perpendiculaire sur l'élément  $ds$ . A la suite d'un changement d'axes coordonnés, nous obtenons la dérivée de  $\rho a' \nu_1$  par rapport à  $\gamma$ , en faisant varier successivement  $\rho$ ,  $\nu_1$  et  $a'$ ; la dérivée partielle par rapport à  $a'$  contient  $\frac{da'}{ds'}$  et  $\frac{da'}{ds''}$  que nous remplaçons par des fonctions de  $\frac{\delta\alpha}{ds'}$ ,  $\frac{\delta'\alpha}{ds''}$ ,  $\frac{\delta\beta}{ds'}$ ,  $\frac{\delta'\beta'}{ds''}$  par la considération de triangles sphériques.

Pour développer le troisième terme, nous considérons le sommet C du petit parallélépipède.

Le développement du deuxième et celui du troisième peuvent s'obtenir au moyen de celui du premier, en y remplaçant  $a, b, c, \frac{da}{ds}$  par  $a', b', c', \frac{da'}{ds}$  pour le second et par  $a'', b'', c'', \frac{da''}{ds}$  pour le troisième.

Le trinôme ainsi développé a trente-trois termes qui se réduisent à quatre et l'équation de continuité devient

$$\frac{d\rho}{dt} + v_1 \frac{d\rho}{ds} + \rho \frac{dv_1}{ds} - \rho v_1 \frac{\partial \alpha}{\partial s'} - \rho v_1 \frac{\partial' \alpha}{\partial s''} = 0.$$

---

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENTE DE M. HUMBERT.

*Élections :*

Sont élus à l'unanimité : M. Burkhardt, présenté par MM. J. Tannery et Kœnigs; M. Lancelin, présenté par MM. Laisant et Chailan.

*Communications :*

M. Fouret : *Sur le théorème des aires dans le mouvement d'un point matériel.*

M. Humbert : *Sur une surface du sixième ordre et sur la fonction thêta à plusieurs variables.*

M. DESIRÉ ANDRÉ communique le théorème suivant : *Sur le nombre des séquences dans les permutations des  $n$  premiers nombres.*

Si l'on désigne par  $\sigma_n$  la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, le rapport  $\frac{\sigma_n}{n^2}$  a pour limite, lorsque  $n$  croît indéfiniment, la fraction  $\frac{4}{9}$ , c'est-à-dire le carré de la limite du rapport  $\frac{s_n}{n}$ , où  $s_n$  est la valeur moyenne des nombres de séquences.

M. MAX GENTY adresse la Communication suivante :

*Sur les systèmes collinéaires.*

1. Étant données deux ponctuelles superposées projectives  $u$

et  $u_1$ , au point  $M$  de  $u$  correspond le point  $M_1$  de  $u_1$ ; au point  $M_1$  de  $u$  correspond le point  $M_2$  de  $u_1$ ; et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite indéfinie de points  $M, M_1, M_2, \dots, M_i$ .

M. Émile Weyr a démontré que, lorsque  $i$  augmente indéfiniment, le point  $M_i$  a pour limite un des points doubles des deux ponctuelles, à la condition que ces points soient réels.

Ce théorème s'étend évidemment aux autres formes de première espèce et, plus généralement, à deux formes élémentaires quelconques supposées et projectives.

Je me propose dans cette Note de l'étendre aux formes projectives de deuxième et de troisième espèce.

2. Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  deux systèmes plans supposés et collinéaires; ces deux systèmes ont trois points doubles, E, F, G, que nous supposerons réels. Les points homologues des deux plans sur la droite EF forment deux ponctuelles projectives dont les éléments doubles sont les points E et F; ces ponctuelles seront parfaitement déterminées si nous nous donnons la quantité  $\lambda''$ , valeur constante du rapport anharmonique formé par les points E et F et par deux points de cette droite, homologues dans les deux systèmes plans  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$ . Les quantités  $\lambda$  et  $\lambda'$  déterminent de la même façon les deux ponctuelles homologues situées sur les côtés FG et GE du triangle EFG. Ces trois quantités ne sont pas arbitraires; elles sont liées par la relation nécessaire

$$\lambda\lambda'\lambda'' = 1.$$

Si le triangle EFG est donné, ainsi que deux des quantités  $\lambda$ ,  $\lambda'$  et  $\lambda''$  par exemple, la collinéation des deux systèmes plans sera parfaitement déterminée. Soit M, en effet, un point quelconque de  $\Sigma$ ; joignons FM et GM qui coupent respectivement les droites GE et EF aux points  $\varphi$  et  $\gamma$ ; déterminons sur ces mêmes droites deux points  $\varphi_1$  et  $\gamma_1$ , par les égalités anharmoniques

$$(1) \quad (GE\varphi\varphi_1) = \lambda'.$$

$$(2) \quad (EF\gamma\gamma_1) = \lambda''.$$

Le point  $M_1$ , commun aux droites  $F\varphi_1$  et  $G\gamma_1$  sera évidemment l'homologue de M dans le système  $\Sigma_1$ .

Ceci posé, supposons qu'au point  $M_i$  de  $\Sigma$  corresponde le point  $M_2$  de  $\Sigma_1$ ; au point  $M_2$  de  $\Sigma$ , le point  $M_3$  de  $\Sigma_1$ ; et ainsi de suite. On obtient, par ces opérations successives, une suite indéfinie de points  $M, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ . Proposons-nous de déterminer la position limite du point  $M_i$ , lorsque  $i$  augmente indéfiniment. Les droites  $FM_i$  et  $GM_i$  coupant respectivement les côtés  $GE$  et  $EF$  aux points  $\varphi_i$  et  $\gamma_i$ , nous avons les relations suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (GE \varphi \varphi_1) = \lambda', \\ (GE \varphi_1 \varphi_2) = \lambda', \\ \dots\dots\dots \\ (GE \varphi_{i-1} \varphi_i) = \lambda'. \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (EF \gamma \gamma_1) = \lambda'', \\ (EF \gamma_1 \gamma_2) = \lambda'', \\ \dots\dots\dots \\ (EF \gamma_{i-1} \gamma_i) = \lambda''. \end{array} \right.$$

Multiplions membre à membre toutes les égalités (3) et toutes les égalités (4); nous obtenons ainsi les deux relations suivantes :

$$(GE \varphi \varphi_i) = \lambda'^i, \quad (EF \gamma \gamma_i) = \lambda''^i.$$

Supposons que les deux quantités  $\lambda'$  et  $\lambda''$  soient différentes de l'unité; plusieurs cas peuvent alors se présenter.

*Premier cas :*  $\lambda' > 1, \lambda'' > 1$ . Les deux quantités  $\lambda'^i$  et  $\lambda''^i$  augmentent indéfiniment avec  $i$ , les points  $\varphi_i$  et  $\gamma_i$  tendent respectivement vers les points  $E$  et  $F$ ; le point  $M_i$  a alors le point  $F$  comme limite.

*Deuxième cas :*  $\lambda' < 1, \lambda'' < 1$ . Les quantités  $\lambda'^i$  et  $\lambda''^i$  tendent vers zéro; les points  $\varphi_i$  et  $\gamma_i$  ayant alors pour positions limites les points  $G$  et  $E$ , le point  $M_i$  tend vers le point  $G$ .

*Troisième cas :*  $\lambda' > 1, \lambda'' < 1$ . Alors  $\varphi_i$  et  $\gamma_i$  tendant vers le même point  $E$ , ce point est aussi la limite du point  $M_i$ .

*Quatrième cas :*  $\lambda' < 1, \lambda'' > 1$ . Dans ce cas, le point  $M_i$  tendra vers l'un des deux points  $G$  ou  $F$ , suivant que  $\lambda$  sera plus grand ou plus petit que 1.

Si  $\lambda = 1$ , on voit immédiatement que les deux systèmes plans  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont homologues; le point  $E$  étant le centre, et  $FG$  l'axe

d'homologie. La position limite du point  $M$  est alors, suivant la valeur de  $\lambda'$ , soit le point  $E$ , soit le point d'intersection  $\epsilon$  de  $EM$  avec  $FG$ . Un cas particulier correspond aux valeurs  $\lambda = 1$ ,  $\lambda' = -1$ ,  $\lambda'' = -1$ ; les deux systèmes homologues sont alors en involution, et, deux points homologues  $M$  et  $M_i$  se correspondant doublement, la suite indéfinie des points  $M_i$  se compose de ces deux points se reproduisant périodiquement.

Enfin il est impossible que deux des quantités  $\lambda$ ,  $\lambda'$  et  $\lambda''$  soient égales à 1; car les deux systèmes  $\Sigma$  et  $\Sigma_i$  coïncideraient dans leur ensemble.

Nous voyons, en résumé, que, si le triangle des points doubles est réel, le point  $M_i$  tend toujours vers l'un des sommets de ce triangle.

Ce théorème s'étend immédiatement aux autres formes de seconde espèce, par exemple à deux gerbes concentriques collinéaires, et aux cordes d'une même cubique gauche se correspondant homographiquement.

3. Le théorème analogue pour la forme fondamentale de troisième espèce se démontrerait de la même façon que dans le paragraphe 2. Nous en donnerons seulement l'énoncé : *Soient deux espaces collinéaires  $\Sigma$  et  $\Sigma_i$ , ayant leurs quatre points doubles réels et formant un tétraèdre  $EFGH$ . Au point  $M$  de  $\Sigma$  correspond un point  $M_1$  de  $\Sigma_i$ ; au point  $M_1$  de  $\Sigma$  correspond un point  $M_2$  de  $\Sigma_i$ ; et ainsi de suite. On forme ainsi une série indéfinie de points  $M, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ . Le point  $M_i$  tend, lorsque  $i$  augmente indéfiniment, vers l'un des sommets du tétraèdre  $EFGH$ .*

---