BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Expression de quelques aires sur le paraboloïde elliptique

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 13-16.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__13_1>

Expression de quelques aires sur le paraboloïde elliptique;
par M. G. Humbert.

Dans un Mémoire inséré aux tomes V et VI du *Journal de Mathématiques* (4ᵉ série), j'ai donné une formule simple permettant d'exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire d'une calotte ellipsoïdale, limitée par une conique le long de laquelle le cône circonscrit à l'ellipsoïde est de révolution. La même méthode s'applique à l'évaluation d'une aire analogue sur le paraboloïde elliptique, mais le résultat est beaucoup plus simple, puisqu'on arrive, pour l'aire cherchée, à une expression algébrique et même rationnelle.

Voici la marche des calculs, qui sont tout à fait élémentaires.

Soit le paraboloïde elliptique

$$\frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0; \tag{1}$$

on suppose $p > 0$, $q > 0$ et $p > q$.

Le lieu des sommets des cônes de révolution *réels* circonscrits à la surface (1) est *une* des paraboles focales, ou plutôt la partie de la parabole extérieure à la surface; les équations de cette focale sont

$$y = 0, \qquad z^2 - 2x(p-q) = p(p-q). \tag{2}$$

Le plan polaire P d'un point (x, z) de la courbe (2), par rapport au paraboloïde, a pour équation

$$X + Z\frac{z}{q} + x = 0; \tag{3}$$

proposons-nous d'évaluer l'aire de la zone comprise, sur le paraboloïde, entre ce plan P et le plan polaire P' d'un point

$$(x + dx, z + dz)$$

infiniment voisin de (x, z), sur la parabole focale (2).

A cet effet, projetons la zone sur un plan normal à l'axe du cône de révolution de sommet (x, z), circonscrit au paraboloïde : il est clair que l'aire de la projection est égale à la différence des aires des projections, sur le même plan, des sections faites dans le paraboloïde par les plans P et P'. Or, en appelant $d\sigma$ l'aire de la zone, et θ l'angle que les plans tangents au paraboloïde le long de la section P font avec l'axe du cône, on a, pour la zone projetée, la valeur $d\sigma \sin\theta$, et, en désignant par ω et $\omega + d\omega$ les aires des sections P et P', par λ et λ' les angles des plans P et P' avec l'axe du cône, il viendra

$$d\sigma \sin\theta = (\omega + d\omega)\sin\lambda' - \omega\sin\lambda. \tag{4}$$

L'axe du cône est la tangente en (x, z) à la parabole focale (2); ses équations sont donc

$$Y = 0, \qquad X(p-q) - Zz + (p-q)(x+p) = 0 \tag{5}$$

et, par suite,

$$\sin\lambda = \frac{pz}{\sqrt{(z^2+q^2)[z^2+(p-q)^2]}},$$

$$\sin\lambda' = \frac{pz + (p-q)\,dz}{\sqrt{[(z+dz)^2+q^2][z^2+(p-q)^2]}}.$$

Si l'on développe $\sin\lambda'$ suivant les puissances croissantes de dz, il vient, en négligeant les termes en dz^2,

$$\sin\lambda' = \sin\lambda + dz\, q\,\frac{q(p-q) - z^2}{(z^2+q^2)^{\frac{3}{2}}[z^2+(p-q)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

$\sin\theta$ se calcule aisément; on trouve

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{p(p-q)}}{\sqrt{z^2+(p-q)^2}}.$$

Enfin ω, aire de la section faite dans le paraboloïde (1) par le plan (3), a pour expression

$$\omega = \pi \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(z^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}{p-q} [z^2 - q(p-q)].$$

On aura $\omega + d\omega$ en changeant, dans cette expression, z en $z + dz$. Portons maintenant dans (4) les valeurs de $\sin\theta$, $\sin\lambda$, $\sin\lambda'$, ω et $\omega + d\omega$; il vient, en divisant tout par $[z^2 + (p-q)^2]^{\frac{1}{2}}$,

$$d\sigma\sqrt{p(p-q)}\,\frac{p-q}{\pi\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q}{(z^2+q^2)}[z^2 - q(p-q)]^2 dz$$
$$+\frac{pz}{(z^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{z\,dz}{(z^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}[z^2-q(p-q)] + (z^2+q^2)^{\frac{1}{2}}.2z\,dz\right\},$$

ou, en réduisant,

$$d\sigma\,\frac{(p-q)^{\frac{3}{2}}}{\pi p}\,q^{\frac{3}{2}} = \frac{z^2-q(p-q)}{(z^2+q^2)}[z^2(p-q)+q^2(p-q)]\,dz + 2pz^2\,dz,$$

c'est-à-dire

$$d\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p-q)^{\frac{3}{2}}}[(3p-q)z^2 - q(p-q)^2]\,dz.$$

On a ainsi l'expression de $\frac{d\sigma}{dz}$ en fonction *entière* de z; on en déduit l'aire σ de la calotte de paraboloïde qui a pour base le plan P :

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}(p-q)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{3p-q}{3}z^3 - q(p-q)^2 z\right] + \text{const.}$$

La constante se détermine en écrivant que σ est nul lorsque le plan P touche le paraboloïde, c'est-à-dire lorsque le pôle (x, z) de ce plan est un des ombilics du paraboloïde. Or les deux ombilics réels sont à l'intersection de la surface avec la focale (2); on trouve ainsi, pour le z de l'ombilic situé au-dessus du plan des xy,

$$z = \sqrt{q(p-q)};$$

et, par suite, on a, pour l'aire cherchée,

$$(6)\qquad \sigma = \frac{\pi p}{p^{\frac{3}{2}}(p-q)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{3p-q}{3}z^3 - q(p-q)^2 z\right] - \frac{2}{3}\pi p q.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant, qui résume cette Note :

Soit un cône de révolution circonscrit au paraboloïde elliptique

$$\frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0 \qquad (p > 0,\quad q > 0,\quad p > q);$$

son sommet est dans le plan $Y = 0$; *désignons par* x *et* z *ses deux autres coordonnées, et supposons, par exemple,* z *positif. L'aire* σ *de la calotte de paraboloïde, qui a pour base le plan polaire du sommet du cône, est une fonction entière, du troisième ordre, de* z, *et elle est donnée par la formule* (6).

Vérification. — Si le paraboloïde est de révolution, on a $p = q$ et z est toujours nul; l'aire σ se présente alors sous forme indéterminée. Mais, si l'on remplace z par sa valeur en fonction de x, tirée de (2), on trouve pour σ, dans le cas général,

$$\sigma = \frac{\pi p}{q^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{3p-q}{3}(p+2x)^{\frac{3}{2}} - q(p-q)(p+2x)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{2}{3}\pi p q,$$

et si l'on fait $p = q$, il vient

$$\sigma = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left[(p+2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right],$$

formule qui se vérifie sans difficulté, en cherchant l'aire engendrée par la révolution, autour de son axe, de la portion de la parabole

$$Y^2 + 2pX = 0,$$

qui est comprise entre le sommet et la droite polaire du point $(x, 0)$.